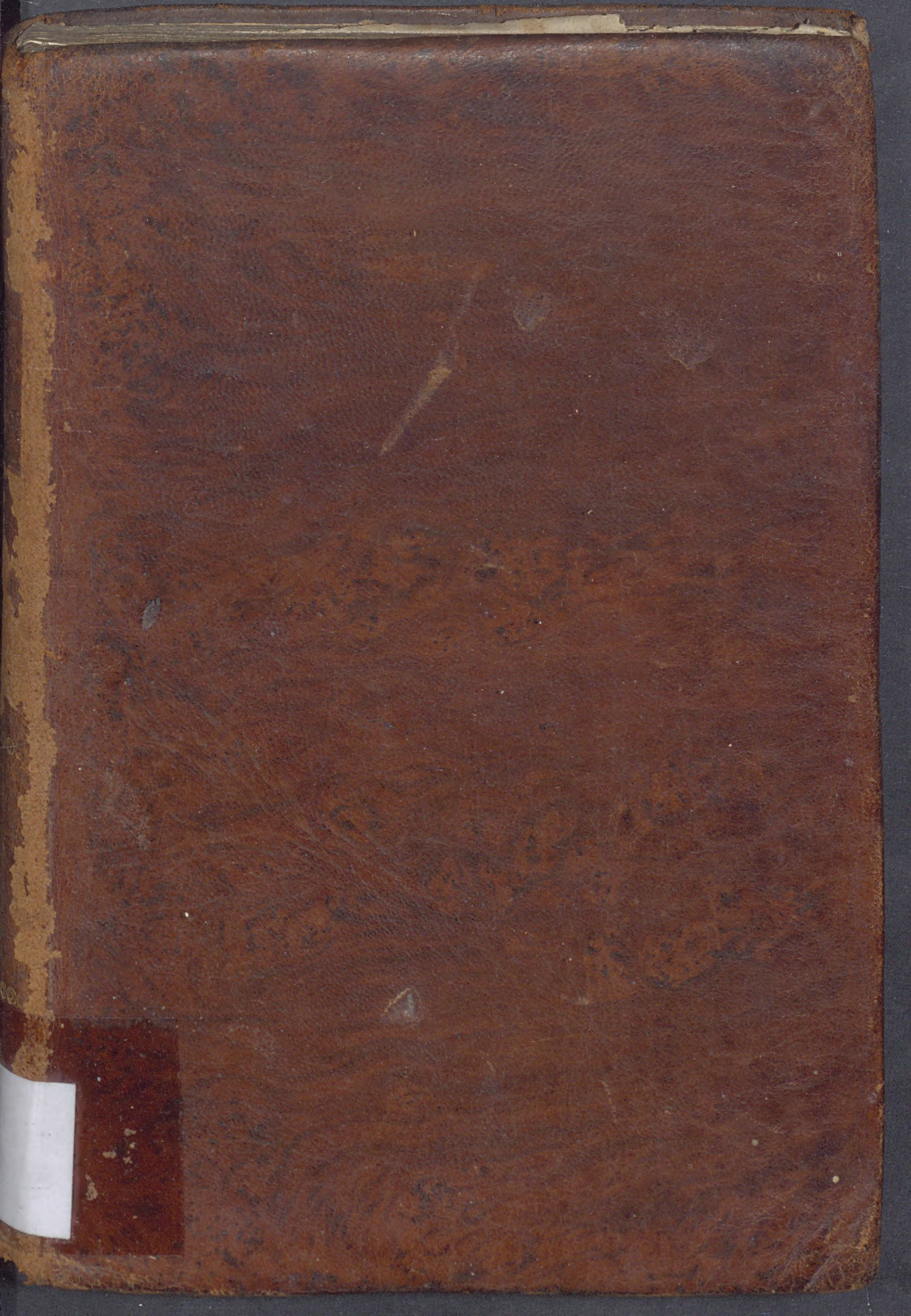
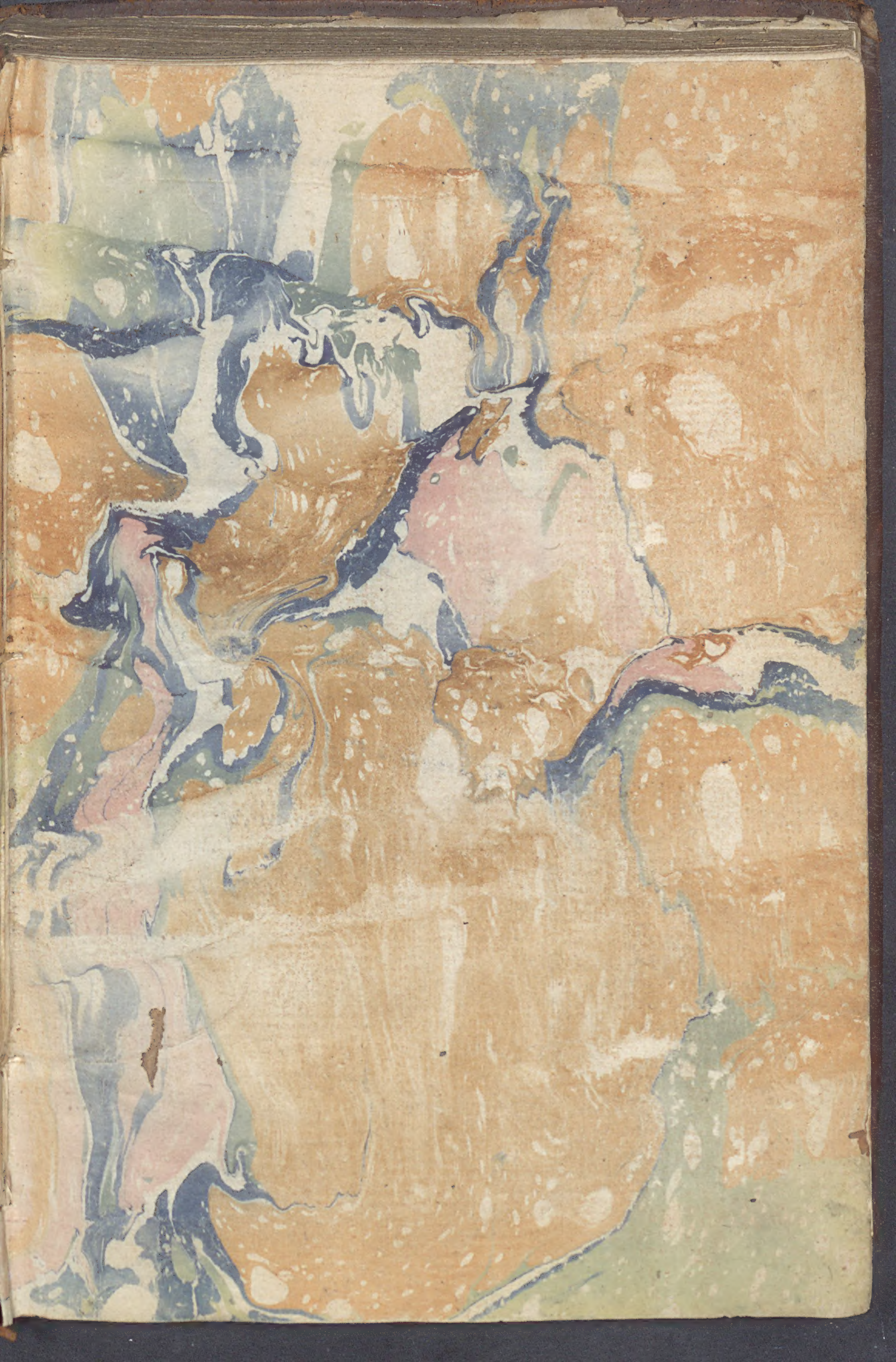






CURSO COMPLETO

ELEMENTAL

DE MATEMATICAS PURAS.

CURSO COMPLETO
ELEMENTAL
DE MATEMATICAS PURAS,

COMPUESTO EN FRANCES POR S. F. LACROIX:

TRADUCIDO AL CASTELLANO

POR D. JOSEF REBOLLO Y MORALES,
CATEDRATICO DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

TOMO II.

ALGEBRA.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL.
AÑO DE 1808.

INDICE.

ERRATAS.

PAG.	LIN.	DICE.	DEBE DECIR.
33	23	$\frac{b-3}{a}$	$\frac{b}{a-3}$
69	17	número	*números*
78	9	$-ab+b^2$	$-ab-b^2$
102	4	$+a^2c^2-b^2c^2$	$+a^2c^2-b^2c^2$
117	14	$\frac{b}{c}-\frac{ac}{a}$	$\frac{b}{c}-\frac{ac}{c}$
156	26	si designa	*si se designa*
192	16	presentado	*presentada*
198	24	287,9	2829
201	1	463	473
255	últ.	§. 112	§. 122
273	17	x^{m-}	x^{m-n}
282	1	$-\frac{2a^3}{5x^3}$	$-\frac{5a^3}{2x^3}$
305	10	propuesto, las	*propuesto las*
307	24	$-\frac{2}{1}p$	$-\frac{1}{2}p$
314	21	$\left(\sqrt[12]{a^2b}\right)$	$\left(\sqrt{a^2b}\right)^3$
315	19	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}}$
317	18	susceptiblc	*susceptible*
320	últ.	$\sqrt{a}$	$\sqrt[4]{a}$
328	27	sx^2	sx
338	5	$x(p'$	$x+(p'$
377	14	$\frac{1}{v}+p$	$\frac{1}{v^n}+p$
378	22	$\frac{1}{\sqrt{}}$	$\frac{1}{\sqrt{9}}$

PAG.	LIN.	DICE.	DEBE DECIR.
386	2	será	*serán*
391	ult.	3.—1	3.1.—1
412	12	10 y 10	10 y 100
429	1	$a(1+r)_n$	$a(1+r)^n$
429	3	proporcion	*progresion*
430	23	fórmula	*fórmulas*

OTRAS ERRATAS DE LA ARITMETICA.

xx	15	lx	*xl.*
145	11	denominador	*numerador*

ADVERTENCIA.

Teniendo en consideracion lo poco comunes que son aún los previos conocimientos de griego necesarios para la lectura de los cálculos en que se usan letras griegas, nos ha parecido conveniente poner aquí la siguiente tabla para mayor comodidad de los lectores.

Α α	Alpha.
Β β ϐ	Beta.
Γ γ ϒ	Ganma.
Δ δ	Delta.
Ε ε	Epsilon.
Ζ ζ	Zeta.
Η η	Eta.
Θ θ ϑ	Theta.
Ι ι	Iota.
Κ κ	Cappa.
Λ λ	Lambda.
Μ μ	Mu.
Ν ν	Nu.
Ξ ξ	Xi.
Ο ο	Omicron.
Π π ϖ	Pi.
Ρ ρ ϱ	Rho.
Σ σ ς	Sigma.
Τ τ ⅂	Tau.
Υ υ	Upsilon.
Φ φ	Phi.
Χ χ	Chi.
Ψ ψ	Psi.
Ω ω	Omega.

TRATADO ELEMENTAL DE ALGEBRA.

NOCIONES PRELIMINARES SOBRE EL TRANSITO DE LA ARITMETICA AL ALGEBRA, Y EXPLICACION DE LOS SIGNOS ALGEBRAICOS.

1 En algunas de las qüestiones que hemos propuesto en el *Tratado elemental de Aritmética* (§§. 154 y siguientes) se puede ya haber notado que para resolverlas teníamos que averiguar primeramente qué operaciones, de las quatro *fundamentales*, debíamos executar con los números conocidos, para que resultasen los desconocidos que buscábamos; y quando ya habíamos descubierto que una cierta y determinada serie de aquellas operaciones nos habia de conducir seguramente á nuestro objeto, lo único que nos restaba era efectuarlas, y las efectuábamos conforme á las reglas que para esto habíamos anteriormente establecido. A esto se reduce en suma la completa solucion de qualquier problema: pero lo mas digno de advertirse es que en aquella primera averiguacion, que sin duda es la parte mas principal, y la única que puede ofrecer dificultades, prescindimos enteramente de todo sistema de numeracion, y aun de los valores particulares de los números dados; pues dependiendo solo del modo con que en la propuesta se nos presentan enlazados con los números conocidos los incógnitos, ó lo que es lo mismo, de las mutuas relaciones de aquellos y estos, en todos casos ha de resul-

tar únicamente del desarrollo, por decirlo así, de las conseqüencias que envuelva la misma propuesta, y en esto no tienen el menor influxo los valores particulares de los números dados, ni ménos el sistema adoptado para la numeracion. Mientras no sean muy complicadas aquellas relaciones, podrá no echarse de ver lo embarazosos y poco adequados que son los idiomas vulgares para desenvolver los razonamientos que hayamos de formar en este género de investigaciones; ni será extraño que no se conozca la necesidad de otro idioma mas sencillo, y de consiguiente mas á propósito para hacernos perceptible la mutua conexîon de todas las partes de nuestros discursos, y para que así podamos discurrir con mayor rapidez y seguridad sobre estas materias. Pero aun sin necesidad de suponer que sean muy complicados los problemas que intentemos resolver, podremos convencernos de lo mucho que la sencillez del idioma, de que hagamos uso, debe facilitar la solucion de ellos, en haciéndonos cargo de que la principal dificultad está reducida á desenvolver y expresar de un modo conveniente las relaciones que con arreglo á la propuesta tengan las cantidades incógnitas entre sí y con las conocidas, y á traducir ó transformar de tal manera aquellas primeras expresiones, que por una serie no interrumpida de proposiciones equivalentes lleguemos últimamente á dar con una concebida en estos términos: *La cantidad desconocida es igual á la suma, ó á la diferencia, ó al producto, ó al quociente de tales ó tales cantidades conocidas.*

A fin de disipar qualquiera obscuridad que puedan todavía dexar estas nociones generales, propongámonos, por exemplo, resolver la qüestion siguiente:

Distribuir un número dado, qualquiera que sea, *en dos partes tales que la una lleve á la otra un exceso tambien dado*, sea el que fuere.

Tratando primeramente de averiguar qué operaciones deberémos executar con las dos cantidades que suponemos conocidas, para hallar las otras dos desconocidas, observarémos que de la propuesta se infieren inmediatamente estas dos conseqüencias: primera, *la parte mayor es igual á la suma de la menor y del exceso dado*: segunda, *la parte mayor sumada con la menor es igual al número que intentamos distribuir*. Así habremos puesto en claro las relaciones que la propuesta envuelve de los números incógnitos entre sí y con los conocidos; y en seguida formarémos este razonamiento.

Una vez que la primera conseqüencia de la propuesta nos viene á decir que esta expresion *la suma de la parte menor y del exceso dado* es equivalente á estotra *la parte mayor*; si sustituimos áquella expresion en lugar de esta, la segunda conseqüencia se transformará en la que sigue: *la suma de la parte menor y del exceso dado, sumada de nuevo con la misma parte menor, es igual al número que intentamos distribuir*. Y como *la suma de la parte menor y del exceso dado, sumada de nuevo con la misma parte menor*, es equivalente á *el doble de la parte menor sumado con el exceso dado*, haciendo esta nueva sustitucion se transformará la misma segunda conseqüencia en estotra: *el doble de la parte menor, sumado con el exceso dado, es igual al número que intentamos distribuir*. Y equivaliendo esto á decir *que el exceso dado y el doble de la parte menor* componen *el número que intentamos distribuir*, se infiere fácilmente *que si de este número se quita*

el exceso dado, el residuo será el doble de la parte menor; y de consiguiente *si de este residuo se toma la mitad, esta será la parte menor.* Quando ya esté conocida la parte menor, le añadirémos el exceso dado, y resultará la mayor.

Por manera que sin necesidad de haber determinado los valores de los dos números que en la propuesta de la qüestion se suponen conocidos, podemos ya mirarla como resuelta, porque ya hemos llegado á descubrir qué operaciones debemos executar con ellos, sean los que fueren, para hallar los otros dos números desconocidos; y como bien se dexa ver, lo que despues de esto falta para completar la solucion es la materialidad de efectuar aquellas operaciones, que es lo único para lo qual es indispensable determinar aquellos valores.

Si, por exemplo, fuere *veinte* el número que nos propongamos repartir, y *seis* el exceso que una de las dos partes ha de llevar á la otra; ya sabemos que restando *seis* de *veinte*, y tomando del residuo *catorce* la mitad, esta mitad *siete* será la parte menor; y agregando á esta el exceso *seis*, la suma *trece* será la parte mayor.

2 Aunque sean muy sencillos el problema propuesto y el razonamiento que hemos hecho para resolverlo, bien pueden habernos dado á conocer que en todos los demas, y con especialidad en los mas complicados, tendremos que repetir con demasiada freqüencia las expresiones *agregando á*, *restando de*, *multiplicando* ó *dividiendo por*, con las quales enunciamos las operaciones indicadas por las relaciones que la propuesta de la qüestion puede establecer entre las cantidades incógnitas y conocidas. No es pues dificil echar de ver que se sim-

plificarán notablemente las proposiciones, y adquirirá mayor claridad el razonamiento, si en lugar de aquellas expresiones sustituimos ciertos signos que indiquen las mismas operaciones, y por cuyo medio se representen los resultados de ellas.

De ahí es que para indicar la adicion, y en vez de la expresion *sumado con* ó *agregado á* se hace uso del signo +, que se lee *mas;* por manera que la combinacion 8 + 7, que se lee *ocho mas siete*, quiere decir: 8 *sumado con 7*, y representa el resultado de la adicion de 8 y 7, ó en una palabra *la suma* 15.

Para indicar la sustraccion se emplea el signo —, que se lee *ménos*, antepuesto al sustraendo; de modo que la combinacion 9 — 5, que se lee *nueve ménos cinco*, quiere decir: que de 9 se ha de restar 5, y representa el residuo que debe resultar en habiendo quitado 5 de 9; esto es, á 4.

Para indicar la multiplicacion de un número por otro se coloca entre los factores el signo × ó un punto, que equivale á *multiplicado por;* y así la combinacion 6 × 5, ó 6.5, se lee: *seis multiplicado por cinco*, y representa el producto 30 de esta *multiplicacion.*

Para indicar que un número se ha de dividir por otro se coloca el primero sobre el segundo, tirando entre los dos una pequeña línea horizontal, ó se pone el divisor á la derecha del dividendo con dos puntos entre los dos. Así que $\frac{12}{4}$ ó 12 : 4, se lee *doce dividido por quatro*, y representa el quociente 3 que ha de resultar de aquella division.

Ademas de estos signos adoptados para indicar las quatro operaciones fundamentales de la Aritmética y representar los resultados de ellas aun antes que esten

determinados, se ha elegido el signo = para sustituirlo en lugar de la expresion *es igual á* que á cada momento tenemos que repetir en el razonamiento que formamos para resolver qualquier problema. De modo que la combinacion $8 - 5 = \frac{12}{4}$, que se lee *ocho ménos cinco es igual á doce dividido por quatro*, quiere decir que el residuo que debe resultar en habiendo quitado 5 de 8, es igual al quociente que ha de resultar en habiendo dividido 12 por 4.

A toda expresion semejante á la última que acabamos de proponer, y que nos indica la igualdad de los resultados de varias operaciones, ó la de otras dos cantidades qualesquiera, se le da el nombre de *equacion*.

No tiene duda que son ya muy considerables las abreviaciones que con el auxîlio de tales signos conseguimos; pero todavía se echan menos algunos otros que nos exîman de la necesidad de hacer uso de otras varias expresiones, como *el número que intentamos repartir*, *el exceso dado*, *la parte mayor*, *la parte menor*, y otras semejantes que nos vemos precisados á repetir continuamente, y que haciendo demasiado difusas las proposiciones, no nos dexan percibir con toda la claridad necesaria el enlace de unas con otras, y nos hacen perder el hilo del discurso. Para evitar el uso de todas las expresiones que indicasen números conocidos ó dados, se ocurrió desde luego el arbitrio de representar á todos estos con las mismas cifras ó guarismos de que nos hemos servido en la Aritmética; pero no siendo posible valernos del mismo medio para representar los números desconocidos, fue necesario para esto elegir algunos otros signos convencionales que han variado con el tiempo. Al cabo se ha venido á establecer por general y uná-

nime consentimiento, no solo que para este efecto se empleen letras del abecedario, sino tambien que por lo comun se prefieran las últimas á todas las demas. Por esta razon hemos hecho en la Aritmética uso de una x para representar el quarto término de qualquiera proporcion en todos los casos en que solo conocíamos los otros tres.

Con el objeto de manifestar hasta qué punto se simplificó y facilitó con el auxîlio de los signos hasta aquí adoptados la solucion de los problemas, tratemos de resolver de nuevo el que nos hemos propuesto en el párrafo anterior, á saber:

Distribuir el número 20 en dos partes tales, que la una lleve 6 de exceso á la otra.

Proponiéndonos, como antes, hallar primeramente el valor de la parte menor, la representarémos por x, y á conseqüencia la parte mayor vendrá á estar bien representada por la combinacion $x+6$; la suma de las dos partes lo estará por $x+x+6$; y la segunda conseqüencia que inmediatamente deduximos de la propuesta de la qüestion, resultará expresada con mucha sencillez y claridad en estos términos:

$$x+x+6=20;$$

y como la suma de dos cantidades iguales equivalga al doble de una de ellas, poniendo $2x$ en lugar de $x+x$, ó del doble de x, se transformará aquella equacion en estotra aun mas sencilla:

$$2x+6=20;$$

y como esta última expresion nos esté indicando que es necesario sumar 6 con $2x$ para que resulten 20, se infiere fácilmente de ella que

$$2x=20-6;$$

ó lo que es lo mismo, $2x = 14$;
y de consiguiente una x, que es la mitad de $2x$, será igual á la mitad de 14, lo qual se expresa de este modo:

$$x = \frac{14}{2} = 7.$$

Es, pues, la parte menor 7, y la mayor 13, como antes hemos hallado.

Si ahora comparamos con el razonamiento que acabamos de hacer, el que primeramente hicimos en idioma vulgar, no hallarémos á primera vista otra diferencia sino la de haber traducido á este otro idioma todas aquellas proposiciones; pero en llegando á cotejar los resultados de ambos razonamientos, echarémos de ver sin la menor dificultad que quando en el primero descubrimos que *la parte menor era igual á la mitad de la diferencia de los dos números dados*, esta expresion nos daba á entender qué operaciones debíamos executar con los números conocidos, qualesquiera que fuesen, para que resultase el desconocido que nos proponíamos hallar; y así habíamos descubierto una regla general para resolver, sin necesidad de repetir el razonamiento, todos los casos particulares comprehendidos en la qüestion general. Pero quando por medio de los signos que hasta aquí hemos adoptado, hemos hallado que $x = 7$, esta expresion no nos da idea alguna del cómo se deduciria inmediatamente de los dos números dados el que nos proponíamos conocer; y de consiguiente el saber que en el caso particular en que sean 6 y 20 los números conocidos, son 7 y 13 los otros dos que buscábamos, de nada puede servirnos para resolver los innumerables casos semejantes que con solo variar los dos números conocidos pueden ocurrir.

Esta ventaja que el primer razonamiento lleva al

segundo, ó por mejor decir, la que un modo de enunciar el mismo razonamiento tiene sobre el otro, proviene de que no habiendo determinado en el primero los valores particulares de los números conocidos, ó lo que viene á ser lo mismo, habiendo prescindido de aquellos valores, y habiéndolos designado con denominaciones generales, quales son *el número que intentamos distribuir* y *el exceso dado*, no pudieron menos de pasar de una proposicion á otra sin alteracion alguna, y aparecer sin ella en el resultado ó conseqüencia final; en lugar de que habiendo determinado en el segundo los valores particulares de los números dados, y habiéndolos representado con las cifras usuales de la Aritmética, hemos podido executar, y en efecto hemos executado con ellos todas las operaciones que en el progreso del discurso se han ofrecido: estas operaciones han hecho desaparecer los números primitivos, y de ahí es que quando se nos presenta solo el resultado final $x=7$, no nos es posible descubrir en él vestigio alguno que nos indique entre las innumerables combinaciones de operaciones aritméticas, que executadas con los dos números 6 y 20 pueden dar por resultado final el número 7, quál precisamente haya sido la que en el caso presente nos ha conducido á este resultado.

3 Luego que se trató de precaver este inconveniente, se vió que el mejor medio de conseguirlo era designar los números conocidos con ciertos caractéres que no teniendo por sí valor alguno particular, pudiesen representarlos con tanta indeterminacion como las expresiones generales de que hemos hecho uso en nuestro primer razonamiento; para que no pudiéndose de este modo efectuar con ellos operacion alguna aritmé-

tica que los hiciese desaparecer, pasasen sin alteracion alguna desde la primera proposicion hasta el resultado ó conseqüencia final. Entre innumerables caractéres que pudieron haberse imaginado para el intento, ningunos parecieron mas adequados que las mismas letras del abecedario, las quales han venido de este modo á ser los símbolos destinados á representar tanto los números conocidos como los incógnitos, sin otra diferencia que la de emplearse por lo comun, segun ya hemos dicho, las últimas para estos, y todas las restantes para aquellos. De unas y de otras tiene el calculador facultad de elegir las que guste para representar todos los números conocidos é incógnitos de que haga mencion la propuesta del problema, con tal que al tiempo de hacer la eleccion designe la letra que ha determinado sustituir á cada número. Volvamos á resolver con este nuevo auxîlio el mismo problema.

Distribuir un número conocido en dos partes tales que la una lleve á la otra un exceso dado.

Una vez que está á nuestro arbitrio elegir de las primeras letras del abecedario las que queramos para representar los números conocidos, y de las últimas para los incógnitos, designarémos por a el número que intentemos repartir; por b el exceso dado; y designando como antes por x la parte menor desconocida, la parte mayor podrá representarse por la combinacion $x+b$, sin necesidad de emplear para ello otra nueva letra.

Así la suma de las dos partes estará bien representada por la combinacion $x+x+b$; y la segunda conseqüencia que deduximos (§. 1) de la propuesta de la qüestion, estará bien expresada de este modo:

$$x+x+b=a;$$

ó de estotro equivalente: $2x+b=a$.

Y viendo en esta última expresion que la cantidad a se compone de las dos partes b y $2x$, es fácil inferir que

$$2x=a-b;$$

y de consiguiente la mitad de $2x$, es decir, una x será igual á la mitad de la cantidad representada por la combinacion $a-b$; lo qual se expresará de este modo:

$$x=\frac{a-b}{2};$$

ó lo que es equivalente:

$$x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

Si ahora traducimos al lenguage vulgar qualquiera de estas dos últimas expresiones, y señaladamente la penúltima, sustituyendo en lugar de las letras y signos que entran en ellas las denominaciones de las cantidades y operaciones representadas por aquellos símbolos, resultará por conseqüencia final la misma regla general que por el primer razonamiento hallamos; á saber: *la parte menor es igual á la mitad de la diferencia de los dos números dados;* lo qual es lo mismo que decir: *para hallar la parte menor se ha de restar del número que nos propongamos repartir el exceso dado, y se ha de tomar la mitad del residuo.*

La última expresion que hemos hallado $x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, traducida del mismo modo, quiere decir, *que para determinar la misma parte menor hemos de tomar la mitad, así del número que nos propongamos repartir, como del exceso dado; y despues hemos de restar de la mitad de aquel la de este.* Aquí vemos invertido el órden de las operaciones; pero teniendo presente la regla establecida en la Aritmética para restar un quebrado de otro, no se podrá dudar de que por esta inversion no debe variar el resultado.

Diximos (§. 1) que en habiendo determinado el valor de la parte menor, le agregaríamos el exceso dado, y resultaria la mayor; y de consiguiente si la parte menor está representada por $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, la mayor deberá representarse por $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$. En esta expresion se nos dice que de $\frac{a}{2}$ hemos de quitar primeramente la mitad de b, y agregar despues una b entera; que equivale á dos mitades de b; y como quitar una y añadir dos se reduce en suma á añadir una, la expresion $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ quedará reducida á $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; la qual, segun la regla para sumar quebrados, equivale á $\frac{a+b}{2}$. Qualquiera de estas dos últimas expresiones nos suministra una regla general para deducir inmediatamente de los dos números dados el valor de la parte mayor, sin necesidad de tener anteriormente conocido el de la menor. En efecto, la penúltima expresion traducida nos viene á decir *que para determinar el valor de la parte mayor debemos sumar la mitad del exceso dado con la del número que nos propongamos repartir*; y la última nos dice que obtendremos el mismo resultado *sumando el exceso dado con el número que nos propongamos repartir, y tomando de esta suma la mitad.*

Despues de esto para completar la solucion de qualquiera de los casos particulares que pueden comprehenderse baxo la misma qüestion general, solo falta la materialidad de efectuar con los números particulares que se nos den, las operaciones que estan meramente indicadas en las expresiones finales que hemos hallado.

Hemos, pues, conseguido completamente el objeto que nos habíamos propuesto de hallar un lenguage mucho mas sencillo que el vulgar, y con cuyo auxîlio no

solo pudiésemos seguir con mayor rapidez y seguridad el razonamiento necesario para resolver qualquier problema, sino que tambien lográsemos que la conseqüencia final resultase expresada con la generalidad de que fuese susceptible, y se limitase á indicarnos la serie de operaciones que debíamos executar con las cantidades conocidas para determinar las incógnitas.

Este lenguage simbólico en que así las cantidades conocidas como las incógnitas que entran en qualquier problema estan representadas por caractéres, á los quales no está asignado ningun valor particular, y en que las operaciones que deben executarse con ellas, estan meramente indicadas por signos convencionales que á este efecto se han elegido, es lo que hablando con toda propiedad, se llama *Algebra*.

4 En el problema que hemos resuelto en los párrafos anteriores, nos hemos siempre propuesto determinar primeramente el valor de la parte menor, porque conociamos que por medio de este era muy fácil inferir el de la mayor. Para que se vea que del mismo modo pudimos determinar primeramente el valor de la parte mayor, y de este deducir despues el de la menor, representemos por z la parte mayor, y suponiendo que, como antes, a represente el número que intentamos repartir, y b el exceso dado, la parte menor resultará bien representada por la combinacion $z-b$; porque es bien claro que en quitando de la parte mayor el exceso dado, el residuo debe ser igual á la menor. La suma de las dos partes vendrá á estar representada por $z+z-b$, ó lo que es lo mismo, por $2z-b$; y como, segun la propuesta de la qüestion, la suma de las dos partes debe ser igual al número que intentemos repartir, tendremos

esta equacion: $2z - b = a$.

Exâminándola atentamente se ve que $2z$ es un minuendo; b un sustraendo, y a el residuo: y como todo minuendo es igual á la suma del sustraendo y residuo, será

$$2z = a + b;$$

y tomando la mitad de $2z$, y de la suma que le es igual, resultará $z = \frac{a+b}{2}$;

ó lo que es lo mismo, $z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$;

expresiones que traducidas al lenguage vulgar vienen á ser las mismas reglas generales que ya antes hallamos para deducir inmediatamente de los dos números dados el valor de la parte mayor. Conocida esta, será fácil inferir el de la menor; en lo qual no creemos necesario detenernos mas.

Lo expuesto hasta aquí nos da suficientemente idea de la absoluta é ilimitada facultad que tiene qualquiera que se proponga resolver una qüestion, de elegir la letra que se le antoje para representar cada una de las cantidades conocidas é incógnitas de que se haga mencion en la propuesta; bien que en habiendo elegido en uso de esta facultad una letra qualquiera para representar una de aquellas cantidades, tendrá que elegir otra qualquiera letra de las restantes para representar otra cantidad distinta, y habrá forzosamente de conservar á cada letra desde el principio del razonamiento hasta la conclusion de él la misma representacion que al tiempo de comenzarlo le haya atribuido.

Tambien podemos ya haber notado que quando la propuesta del problema nos dé á conocer alguna relacion que tengan entre sí las cantidades incógnitas, no será necesario representar á cada una de estas con una

letra distinta, sino que en habiendo representado qualquiera de ellas con la letra que hayamos tenido á bien escoger, podremos designar todas las demas incógnitas por combinaciones de las letras que anteriormente hayamos elegido. Así es que quando en el problema que hemos resuelto nos proponíamos determinar primeramente la parte menor, y á conseqüencia la designábamos por x, no representábamos la parte mayor por otra nueva letra, sino por la combinacion $x+b$; y quando nos proponíamos hallar primeramente la parte mayor, y la representábamos por z, no designábamos la parte menor con otra letra distinta sino con la combinacion $z-b$; porque la propuesta de la qüestion nos daba á conocer que la parte mayor llevaba á la menor el exceso b.

Es muy importante tener entendido que una misma relacion entre varios números conocidos é incógnitos se puede enunciar de muchos y muy diferentes modos; y como la solucion de qualquier problema dependa solo de aquella relacion y no del modo de enunciarla, siempre que las propuestas de dos ó mas qüestiones no se diferencien mas que en el modo de expresar una misma relacion, se podrá aplicar á todas la solucion que se haya dado á qualquiera de ellas.

Si, por exemplo, nos propusiésemos ahora *hallar dos números, cuya suma y cuya diferencia esten conocidas*, podríamos fácilmente echar de ver que las cantidades conocidas é incógnitas que entran en esta qüestion, tienen entre sí la misma relacion que las de la qüestion que antes hemos resuelto, bien que esté enunciada de un modo muy diferente; porque el número que nos proponíamos antes repartir era la suma de las dos partes desconocidas; y el exceso dado era la diferen-

cia de ellas. Podemos, pues, aplicar á la nueva qüestion la solucion que para la anterior hemos hallado, sin otra alteracion que la de expresar las cantidades conocidas con las voces de que se hace uso en la nueva propuesta. Así que diremos:

El menor de los dos números incógnitos es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia que se nos dan conocidas.

Y el mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia.

5 Propongámonos ya otra qüestion que, aunque análoga á la anterior, es un poco mas complicada:

Distribuir un número dado en tres partes desiguales, tales que el exceso de la mayor sobre la mediana y el de esta sobre la menor sean tambien dos números dados.

Con el objeto de fixar las ideas atribuirémos primeramente á los tres números conocidos valores particulares y determinados, suponiendo que el número que vamos á repartir sea *doscientos y treinta*; que el exceso de la parte mayor sobre la mediana sea *sesenta;* y el de la mediana sobre la menor sea *quarenta*.

Ahora bien, si proponiéndonos hallar primeramente la parte menor la designamos por x, la parte mediana, que segun la propuesta debe tener *quarenta* mas que la menor, estará bien representada por la combinacion $x+40$; y la mayor, que ha de tener *sesenta* mas que la mediana, estará bien representada por la combinacion $x+40+60$. Y como las tres partes juntas han de componer todo el número *doscientos y treinta* que intentamos repartir, estará bien expresada esta condicion en estos términos:

$$x + x + 40 + x + 40 + 60 = 230.$$

Poniendo $3x$ en lugar de $x + x + x$, y 140 en lugar de $40 + 40 + 60$, aquella expresion ó equacion quedará reducida á estotra mucho mas sencilla:

$$3x + 140 = 230;$$

la qual nos está dando á entender que 230 se compone de 140 y de la cantidad representada por $3x$. De consiguiente si de 230 se resta 140, el residuo habrá de ser la cantidad representada por $3x$, lo qual se expresará de este modo: $3x = 230 - 140$;
ó lo que es lo mismo, $3x = 90$.
Si, pues, $3x$ es igual á 90, una x, que es la tercera parte de $3x$, será forzosamente igual á la tercera parte de 90; y de consiguiente tendremos estas nuevas equaciones: $x = \frac{90}{3}$;

$$x = 30.$$

Sabiendo ya que la parte menor que buscábamos es 30; agregándole 40, resultará que 70 es la parte mediana; y agregando á esta 60, vendremos en conocimiento de que 130 es la parte mayor.

6 Aunque fuesen otros muy distintos los tres números dados en la propuesta, habríamos de seguir en la resolucion del problema el mismo rumbo que acabamos de trazar en el párrafo anterior; pero mientras designemos las cantidades conocidas con guarismos, que, como ya se sabe, representan valores particulares y determinados, á la menor variacion que padezca qualquiera de los números dados, tendremos que formar de nuevo todo el razonamiento, y executar todas las operaciones, por cuyo medio hemos descubierto que en el caso particular propuesto era 30 la parte menor; porque no habiendo quedado en este resultado final vestigio algu-

no del influxo que en la formacion de él ha tenido cada uno de los números dados, no podemos ver en él cosa alguna que nos dé á conocer la serie de operaciones que se han executado con los tres números 230, 40 y 60, y que efectuadas con otros tres qualesquiera, nos hayan de conducir directamente al resultado final que á cada caso particular corresponda.

A fin, pues, de conseguir una solucion general, absolutamente independiente de los valores particulares de los tres números dados, y que solo nos haga ver la serie de operaciones que se han de efectuar con ellos, sean los que fueren, para que resulte el valor de la incógnita; designarémos por a el número que nos propongamos repartir, por b el exceso que la parte mediana haya de llevar á la menor, y por c el que la mayor deba llevar á la mediana. Suponiendo que nos propongamos como antes determinar primeramente la parte menor, y que la hayamos representado por x, la parte mediana estará bien representada por la combinacion $x+b$, y la mayor por $x+b+c$. Y como el conjunto de las tres partes ha de ser igual al número que tratemos de distribuir, resultará bien expresada esta condicion en estos términos:

$$x+x+b+x+b+c=a.$$

Sustituyendo $3x$ en vez de $x+x+x$, y $2b$ en lugar de $b+b$, quedará reducida aquella expresion á estotra mas sencilla:

$$3x+2b+c=a;$$

en la qual se nos dice que el número a que intentamos repartir equivale al conjunto de las tres cantidades representadas por $3x$, $2b$ y c; y de consiguiente si del número a quitamos las dos cantidades $2b$ y c, el residuo

deberá ser $3x$; lo qual expresaremos de este modo:

$$3x = a - 2b - c;$$

de donde deducirémos fácilmente que una x, tercera parte de $3x$, es igual á la tercera parte del residuo representado por la combinacion $a - 2b - c$; cuya igualdad expresarémos así: $x = \frac{a - 2b - c}{3}$.

En esta expresion del resultado final de nuestro razonamiento debemos notar que no habiéndose asignado valor alguno particular á los símbolos a, b, c que representan las tres cantidades conocidas que entran en la qüestion, no es posible que resulte valor alguno particular y determinado para el símbolo x que al principio hemos elegido para representar la menor de las tres cantidades incógnitas. Lo único que esta expresion final nos indica es la serie de operaciones que para determinar el valor de aquella incógnita deberémos efectuar con las tres cantidades conocidas quando á cada una de estas se le haya asignado un valor particular.

En efecto, si traducimos al lenguage vulgar la expresion $x = \frac{a - 2b - c}{3}$, sustituyendo en lugar de las letras las denominaciones generales de las cantidades representadas por ellas, y enunciando las operaciones indicadas por los signos, resultará la siguiente regla general: *La menor de las tres partes desconocidas se hallará restando del número que intentemos repartir, el doble del exceso que la parte mediana debe llevar á la menor, y ademas el exceso que la mayor debe llevar á la mediana, y tomando la tercera parte del residuo.*

A todas las expresiones algebráicas semejantes á la que acabamos de traducir ó descifrar, las quales, segun

hemos hecho ver, no son otra cosa que unas meras indicaciones de la serie de operaciones que se deben executar con las cantidades conocidas para hallar las desconocidas, y de consiguiente vienen á ser unas reglas generales escritas en lenguage simbólico, se las llama por esta razon *fórmulas.*

Si despues de hallada la *fórmula* queremos resolver qualquiera de los innumerables casos particulares comprehendidos en la misma qüestion general, solo nos restará efectuar por medio de las reglas de la Aritmética las operaciones que la fórmula nos prescribe. Así en el caso particular que antes nos hemos propuesto restaremos de 230 el doble de 40, y ademas 60, ó lo que es lo mismo 80 y 60, ó en una palabra 140; y tomando del residuo 90 la tercera parte, vendremos en conocimiento de que 30 es la parte menor que buscábamos.

Si el número que nos propusiésemos repartir fuese 520, y el exceso de la parte mediana sobre la menor 50, y el de la mayor sobre la mediana 120, restaríamos de 520 el doble de 50 y ademas 120; es decir, 100 y 120, ó en una palabra 220; y tomando del residuo 300 la tercera parte, hallaríamos que la menor de las tres desconocidas era 100. Agregando ahora á esta el exceso 50, resultaria la mediana 150; y por último, añadiendo á esta el otro exceso 120, resultaria la mayor 270. Así que las tres partes que se nos pedian del número 520 son:

100, 150, 270,

las quales sobre tener la particular desigualdad que se requeria, juntas componen el número que nos proponíamos repartir.

Parece inútil advertir que así como hemos determinado primeramente el valor de la parte menor, pudimos habernos propuesto determinar en primer lugar el valor de la mediana ó el de la mayor, y que de consiguiente pudimos hallar fórmulas para deducir inmediatamente de los tres números dados el valor de qualquiera de los incógnitos, sin necesidad de tener anteriormente conocido ninguno de los otros dos.

Sin embargo de que la última qüestion general es algo mas complicada que la primera, no ofrece todavía gran dificultad el resolverla sin mas auxîlio que el lenguage vulgar. Así la hemos resuelto en la página siguiente, colocando á continuacion de cada una de las proposiciones del razonamiento su traduccion en caractéres ó símbolos algebráicos, para que el cotejo que de este modo puede fácilmente hacerse de las dos soluciones, ponga mas en claro qué cosa sea el Algebra; quánta deba ser su utilidad, y qué circunstancias pueden haber contribuido á su invencion. [1]

1 Si porque hemos dado á conocer el Algebra resolviendo con su auxîlio problemas aritméticos ó relativos á números, la llamásemos, como ha solido hacerse, *Aritmética universal*, limitaríamos demasiado la idea que debemos formarnos de ella. Los símbolos de que el Algebra se vale son por su indeterminacion igualmente aptos para expresar las relaciones de las varias y diferentes formas de la extension que las relaciones de los números; y así tenemos en el Algebra un lenguage tan á propósito para resolver los problemas geométricos como los aritméticos. Y puesto que no puede pertenecer á las Matemáticas cosa alguna que no sea número ó extension, ó que no pueda representarse por la extension y de consiguiente por los números, el Algebra viene á ser el idioma universal de todas las Matemáticas puras y mixtas.

PROBLEMA.

Distribuir un número dado en tres partes tales que la mediana lleve á la menor un exceso dado, y la mayor lleve á la mediana otro exceso tambien dado.

SOLUCION.

En lenguage vulgar.	*Con los símbolos algebráicos.*
	Desígnese el número dado por a. El primer exceso............... por b. El segundo........................ por c. La parte menor................ por x.
La parte mediana será igual á la menor mas el exceso que á esta lleve la mediana.	La parte mediana...... por $x+b$.
La mayor será igual á la mediana, mas el exceso que á esta lleve la mayor..........	La parte mayor... por $x+b+c$.
Las tres partes reunidas han de componer el número propuesto; y de consiguiente la parte menor, mas la parte menor y el exceso que á esta lleve la mediana, mas la parte menor y el exceso que la lleve la mediana, y el exceso que á esta lleve la mayor, componen el número propuesto..........	$x+x+b+x+b+c=a$.
Luego tres veces la parte menor, mas dos veces el exceso que á esta lleve la mediana, mas el exceso que á esta última lleve la mayor, componen el número propuesto..........	.... $3x+2b+c=a$.
Luego tres veces la parte menor equivalen al número propuesto menos dos veces el exceso que á la parte menor lleve la mediana, y menos el exceso que á esta lleve la mayor..........	.... $3x=a-2b-c$.
Luego finalmente la parte menor es igual á la tercera parte de lo que quede despues de quitar del número propuesto dos veces el exceso que á la parte menor lleve la mediana, y ademas el exceso que á esta lleve la mayor..........	.... $x=\frac{a-2b-c}{3}$.

7 Los signos que hemos dado á conocer (§. 2) como destinados á indicar las operaciones aritméticas y representar sus resultados, no son los únicos de que se hace uso en el Algebra. Mas adelante veremos que nuevas consideraciones han hecho introducir algunos otros, y ya se puede haber notado que hemos indicado la multiplicacion de la cantidad x por *dos* y por *tres*, y la de la cantidad b por *dos* con solo colocar los guarismos que representan á los multiplicadores, á la izquierda de las letras x y b sin interposicion de signo alguno. Lo mismo harémos en todos los casos semejantes que ocurran en lo sucesivo; por manera que los guarismos colocados inmediatamente á la izquierda de las letras, indicarán que las cantidades representadas por estas estan multiplicadas por los números que aquellos representan. Así que $5a$, $7x$, $9z$ &c. equivaldrán á 5 veces la cantidad a, 7 veces la cantidad x, 9 veces la cantidad z &c.; y del mismo modo $\frac{3}{4}x$ ó $\frac{3x}{4}$ representarán las *tres quartas* partes de la cantidad designada por x, las quales equivalen, como ya se sabe, á una sola quarta parte de la cantidad designada por $3x$; las expresiones $\frac{7}{9}z$, $\frac{7z}{9}$ representarán las *siete novenas* partes de la cantidad designada por z, ó lo que es lo mismo, *una novena* parte de la cantidad designada por $7z$, y así de las demas.

En general indicarémos la multiplicacion de unas cantidades por otras, y representarémos los productos de ellas con solo poner los factores inmediatamente á continuacion unos de otros sin interposicion de signo alguno, á no ser que sea absolutamente necesario para evitar confusion. De modo que las expresiones ax, bc, mz &c. serán equivalentes á estotras $a \times x$, $b \times c$, $m \times z$ &c.; pero esta supresion del signo de la multiplicacion

no deberá tener lugar en el caso en que los factores sean números representados por guarismos; pues si por exemplo en lugar de la combinacion 3×5 ó $3 \cdot 5$ que representa al *quince*, escribiésemos, suprimiendo el signo, 35, esta combinacion no podria ya representar al *quince* sin quebrantar la ley fundamental de nuestro sistema de numeracion.

De las equaciones.

8 Si exâminamos con alguna atencion lo que hemos practicado (§§. 3 y 6) para resolver con el auxîlio de este lenguage simbólico las dos qüestiones que hasta ahora nos hemos propuesto, echarémos de ver que en primer lugar con los caractéres y signos algebráicos hemos representado las cantidades conocidas é incógnitas y los resultados de las operaciones indicadas por las relaciones que entre aquellas cantidades establecia la propuesta, ó como suele decirse, por las condiciones del problema; todo con el objeto de venir á formar una equacion que expresa ó implícitamente se hallaba entre las condiciones de la misma propuesta, y en la qual entraban la cantidad incógnita y todas las conocidas. Así hemos establecido (§. 3) que $2x + b = a$; y (§. 6) que $3x + 2b + c = a$.

En segundo lugar hemos deducido de esta equacion primitiva y fundamental una serie de conseqüencias ó nuevas equaciones, las quales nos han hecho descubrir que la incógnita era igual al conjunto de las cantidades conocidas, enlazadas, por decirlo así, entre sí por medio de operaciones que en la Aritmética hemos ya aprendido á efectuar con ellas. Así hemos descubierto (§. 3) que $x = \frac{a - b}{2}$, y (§. 6) que $x = \frac{a - 2b - c}{3}$.

De estas dos partes que acabamos de hacer notar en la solucion de los problemas propuestos, y que se podrán igualmente observar en la de todos los demas á que pueda aplicarse el Algebra, la primera, que tiene por objeto traducir al lenguage simbólico las condiciones de la qüestion, ó como suele decirse, *poner el problema en equacion*, no puede sujetarse á reglas fixas é invariables, que observadas con exâctitud nos conduzcan seguramente al intento. Lo único que sobre este particular podemos decir es que por punto general debemos hacernos completamente cargo de todas las condiciones que explícita ó implícitamente contenga la propuesta; desenvolver las relaciones que las cantidades desconocidas tengan entre sí y con las conocidas; y familiarizarnos muchísimo con el lenguage algebráico para poder expresar en este lenguage aquellas relaciones y condiciones, entre las quales se ha de hallar forzosamente la equacion que nos proponemos formar.

En habiendo formado la equacion fundamental hay métodos generales y seguros para deducir de ella la conseqüencia final ó *fórmula* que nos indique la serie de operaciones que debemos executar con las cantidades conocidas para determinar el valor de la incógnita; á lo qual se reduce la segunda parte de la solucion. Pero antes de explicar estos métodos creemos conveniente dar á conocer algunas denominaciones de que se hace freqüente uso en este tratado.

El conjunto de todas las cantidades que en una equacion qualquiera estan colocadas á un mismo lado del signo $=$, se llama *miembro de la equacion.* Así que toda equacion está formada de dos *miembros;* el que está á la izquierda del signo de igualdad se llama el

primer miembro, y el que se halla á la derecha del mismo signo *el segundo*. En la equacion por exemplo $2x + b = a$ la combinacion $2x + b$ es el primer miembro, y a el segundo. Cada una de las varias partes de cada miembro, que estan separadas unas de otras con los signos + ó −, se llama *término*; por manera que el primer miembro de la equacion anterior tiene dos términos, y uno solo el segundo. En la equacion $\frac{3}{4}x + 7 = 8x - 12$ cada miembro tiene dos términos; $\frac{3}{4}x$ y 7 son los del primer miembro; $8x$ y 12 son los del segundo. Los términos que á su izquierda no tengan signo alguno de adicion ó sustraccion, ó que tengan el signo +, se llamarán *aditivos*, y los que tengan á su izquierda el signo −, *sustractivos*.[1] Así de los quatro términos que entran en la última equacion, los tres primeros son *aditivos*, y solo el último es *sustractivo*.

Deducir de la equacion fundamental de un problema la conseqüencia final ó fórmula, en la qual se halle la incógnita sola en un miembro, por lo comun en el primero, y en el otro todas las cantidades conocidas, es lo que se llama *despejar la incógnita* ó *resolver la equacion*.

Como las diversas qüestiones que pueden ocurrirnos deban conducir á equaciones mas ó menos complicadas, ha parecido conveniente dividirlas en varias clases ó *grados*. Las mas sencillas de todas son las que se

1 No hacemos por ahora uso de las denominaciones de *positivos* y *negativos*, porque los signos + y — en su primitiva institucion no indicáron otra cosa que las dos operaciones *adicion* y *sustraccion*; y de consiguiente los términos á los quales esten antepuestos, no fueron considerados sino como *sumandos* y *sustraendos*. Mas adelante veremos cómo vinieron los mismos signos á tener una nueva representacion conservando siempre la primitiva.

llaman del *primer grado*, en las quales ninguna incógnita está multiplicada por otra incógnita ni por sí misma; y de las equaciones del primer grado las mas sencillas son las que solo contienen una incógnita: por cuya razon vamos en primer lugar á tratar de estas.

De la resolucion de las equaciones del primer grado que tienen una sola incógnita.

9 Resolver una equacion es, segun hemos dicho, deducir de ella otra que en uno de sus miembros no tenga ninguna cantidad mas que la incógnita, y que en el otro no tenga mas cantidades que las conocidas, combinadas entre sí por medio de operaciones que ya sepamos efectuar. De esto se sigue que para reducir á este estado qualquiera equacion propuesta, es necesario separar de la incógnita todas las cantidades conocidas, con las quales se nos presente combinada en el primero ó en el segundo miembro ó en entrambos. Ahora bien, de tres modos puede la incógnita, segun lo que hasta aquí hemos visto, presentársenos mezclada con cantidades conocidas.

1.º Por adicion y sustraccion, como en las equaciones:

$$x+5=9-x;$$
$$x+a=b-x.$$

2.º Por adicion, sustraccion y multiplicacion, como en estas:

$$7x-5=12+4x;$$
$$ax-b=c+dx.$$

3.º Por adicion, sustraccion, multiplicacion y division, como en estotras:

$$\frac{5x}{3}+8x-7=\frac{11x}{12}+9;$$
$$\frac{ax}{b}+cx-d=\frac{fx}{g}+h.$$

10 Para conseguir, como nos proponemos, que la incógnita quede enteramente *despejada* ó desembarazada de las adiciones y sustracciones por cuyo medio puede hallarse combinada con cantidades conocidas, se deben en primer lugar reunir en un solo miembro de la equacion todos los términos en que se halle la incógnita, y al mismo tiempo reunir en el otro miembro todos los términos que solo contengan cantidades conocidas; para lo qual es necesario saber *trasponer* ó trasladar de un miembro á otro un término qualquiera sin que dexe de subsistir la igualdad de los dos nuevos miembros.

En la equacion, por exemplo, $7x - 5 = 12 + 4x$ es necesario antes de todo *trasponer* del segundo miembro al primero el término $4x$, y del primero al segundo el término conocido 5. Para esto conviene observar que con solo borrar ó suprimir el término aditivo $4x$ que se halla en el segundo miembro, se le quita á este la cantidad representada por aquel término; y de consiguiente para que despues de hecha esta sustraccion se conserve la igualdad de los dos miembros, es indispensable quitar la misma cantidad al primero. Esto, sino se efectua, se indica por lo menos escribiendo $-4x$, con lo qual el primer miembro vendrá á ser $7x - 5 - 4x$; y la equacion propuesta se habrá transformado en estotra:

$$7x - 5 - 4x = 12.$$

Si ahora borramos en el primer miembro el término 5 y el signo que le acompaña, suprimimos ó dexamos de hacer una sustraccion de 5 unidades, y de consiguiente el resultado que representa la nueva combinacion $7x - 4x$ debe contener 5 unidades mas que el representado por la anterior combinacion $7x - 5 - 4x$, equivalente á $7x - 4x - 5$. Suprimir pues del primer miembro el

término sustractivo 5 equivale á agregar á aquel miembro *cinco* unidades; por cuya razon para que despues de hecha aquella supresion subsista la igualdad de ambos miembros, es necesario agregar al segundo otras tantas unidades, ó lo que equivale á lo mismo, escribir en él $+ 5$. Así tendremos esta nueva equacion:

$$7x - 4x = 12 + 5.$$

Efectuando ahora la sustraccion que aparece indicada en el primer miembro, y la adicion que está indicada en el segundo, se reducirá la última equacion á esta mucho mas sencilla:

$$3x = 17.$$

Estos razonamientos, que se pueden fácilmente aplicar á qualesquiera otros exemplos, nos hacen ver que borrando ó suprimiendo de un miembro de una equacion un término aditivo y que de consiguiente contribuía al aumento del resultado de aquella combinacion de términos, es necesario para que despues de hecha aquella supresion subsista la igualdad, quitar la misma cantidad del otro miembro, ó lo que equivale á lo mismo, escribir en este otro miembro con el signo $-$ el término suprimido que antes tenia el signo $+$ ó estaba sin signo alguno; y por el contrario, siempre que suprimamos de un miembro un término sustractivo y que de consiguiente contribuía á disminuir el resultado de la combinacion en que se hallaba, tendremos que agregar igual cantidad al otro miembro, ó lo que es equivalente, escribir en este otro miembro con el signo $+$ el término suprimido, para que así se restablezca la igualdad que la supresion habia alterado. Podremos pues establecer la siguiente

Regla general: *Para trasponer de un miembro de*

una equacion al otro un término qualquiera, se le debe borrar ó suprimir del miembro en que primeramente se halle, y escribirlo en el otro miembro con signo contrario al que antes tenia.

11 Por medio de esta regla podremos en quantos casos ocurran semejantes á los propuestos reunir, como es necesario, en un solo miembro de la equacion todos los términos que contengan la incógnita, y en el otro todos los que no la contengan. Quando hayamos efectuado esta trasposicion, podremos considerar á toda la combinacion de términos en que se halle la incógnita, como un producto que se puede descomponer en dos factores, uno de los quales sea la misma incógnita, y el otro una ó mas cantidades conocidas.

El modo de hacer esta descomposicion se ocurre inmediatamente en todas las equaciones *numéricas*, [1] y señaladamente en las que no contienen fracciones; porque en esta especie de equaciones todos los términos en que se halla la incógnita se reducen finalmente á uno solo. Si, por exemplo, despues de executada la trasposicion de términos tuviésemos esta equacion:

$$10x + 7x - 2x = 25 + 7 - 2;$$

efectuando las adiciones y sustracciones que estan indicadas en los dos miembros, se transformaria en estotra mucho mas sencilla:

$$15x = 30.$$

Ahora bien, $15x$ es un producto cuyos factores son x y 15; y como la equacion nos está indicando que aquel producto equivale á 30, es fácil ver que nos hallamos en el caso de tener conocido un producto y uno de sus

1 Así se llaman todas las equaciones, en las quales no hay mas letra que la que representa la cantidad incógnita.

factores, y buscar el otro factor. Dividirémos pues el producto conocido 30 por el factor conocido 15; y el quociente será el factor incógnito. Así que,

$$x = \frac{30}{15}.$$

Lo mismo puede executarse en todas las equaciones *literales* [1] semejantes á esta:

$$ax = bc,$$

porque inmediatamente se ve que ax representa un producto cuyos factores son x y a; y equivaliendo ax á la cantidad conocida bc, se determinará el factor incógnito dividiendo el valor del producto por el factor conocido. Será pues

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Si despues de hecha la trasposicion de términos tuviese la equacion esta forma:

$$ax + bx = cd - ef,$$

notaríamos que la combinacion de términos del primer miembro representa la suma de dos productos que tienen el factor comun x; y como *la suma de dos ó mas productos que tienen un factor comun es igual á un solo producto, cuyos factores son el mismo factor comun y la suma de los demas factores que no son comunes,* [2] la

1 Así se llaman las equaciones, en las quales no solo la cantidad incógnita sino tambien las conocidas estan representadas por letras.

2 Sobre este principio está fundada la regla de la multiplicacion aritmética. Quando nos proponemos, por exemplo, multiplicar el número *quarenta y siete* por *nueve*, multiplicamos *siete* por *nueve*, y *quarenta* por *nueve*, y sumamos los dos productos parciales, porque estamos bien convencidos de que esta suma de los dos productos, cuyo factor comun es *nueve*, equivale á un solo producto, cuyos factores son el mismo 9 y la suma 47 de los otros dos factores.

combinacion $ax+bx$ equivaldrá al producto de la x multiplicada por $a+b$; y de consiguiente, con arreglo á lo que hemos practicado en el caso anterior, será:

$$x=\frac{cd-ef}{a+b}.$$

Para expresar en el lenguage algebráico que la combinacion $ax+bx$ equivale al producto de la x multiplicada por la suma $a+b$, se representa este producto de este modo: $x(a+b)$, encerrando dentro de un paréntesis la suma de todos los factores que no sean comunes, y colocando inmediatamente á la izquierda ó á la derecha del paréntesis el factor comun. Así se dice que $ax+bx$, y $x(a+b)$ ó $(a+b)x$ son tres expresiones equivalentes. Por la misma razon lo son tambien estotras: $am+bm+cm$; $m(a+b+c)$; $(a+b+c)m$.

Si la equacion fuese $ax-bx=cd-ef$, tendriamos presente que la combinacion de términos del primer miembro representa la diferencia de dos productos que tienen un factor comun; y como *la diferencia de dos productos qualesquiera que tengan un factor comun es equivalente á un solo producto, cuyos factores son el mismo factor comun y la diferencia de los que no lo sean;* en lugar de la combinacion $ax-bx$ podremos sustituir la expresion $x(a-b)$, con la qual se representa aquel producto. Será pues:

$$x(a-b)=cd-ef;$$

y de consiguiente $x=\frac{cd-ef}{a-b}$.

Si la equacion propuesta fuere $ax+bx-cx=de+fg$, podremos considerar al primer miembro como equivalente á un solo producto, cuyos factores son la x y la combinacion $a+b-c$ de cantidades conocidas. Este pro-

ducto se representará por la expresion $x(a+b-c)$, y la equacion propuesta tomará esta forma:

$$x(a+b-c)=de+fg;$$

y de esta se deducirá que

$$x=\frac{de+fg}{a+b-c}.$$

Estos razonamientos, que se pueden fácilmente aplicar á todos los demas exemplos semejantes, nos hacen ver que *despues de haber reunido en un solo miembro de la equacion todos los términos en que se halle la incógnita, y en el otro miembro todos los demas términos que no la contengan, podremos siempre considerar á la combinacion de los primeros como equivalente á un solo producto, cuyos factores son la misma incógnita y el conjunto de todos sus multiplicadores combinados con los mismos signos que en la equacion les esten antepuestos.* A conseqüencia de esto *hallarémos el valor de la incógnita*, esto es, *el de uno de los factores dividiendo el miembro enteramente conocido, y que representa el valor del producto, por aquel conjunto de multiplicadores, que es el otro factor.*

Segun esta regla la equacion $ax-3x=b$ equivaldrá á estotra $x(a-3)=b$; y de esta se deducirá que

$$x=\frac{b-3}{a}.$$

La equacion $ax+x=c-d$ equivaldrá á $x(a+1)=c-d$, porque la cantidad x, ú otra qualquiera que se halle sola en un término, se puede considerar como el producto de la misma cantidad multiplicada por 1. Ademas de que en la cantidad representada por la combinacion $ax+x$ está contenida la x una vez mas que en el producto ax; si pues en este producto está

la x multiplicada por a, en la combinacion $ax+x$ lo estará por $a+1$, y de consiguiente se deducirá de la equacion propuesta que

$$x=\frac{c-d}{a+1}.$$

12 Bien se dexa ver que si todos los términos de una equacion fueren exâctamente divisibles por una misma cantidad ó tuvieren un factor comun, se les podrá dividir por aquella cantidad, ó suprimir el factor comun en todos ellos, porque esta supresion equivale á dividir por un mismo número todas las partes de dos cantidades que por suposicion son iguales entre sí.

Supongamos por exemplo la equacion:

$$6abx-9bcd=12bdx+15abc;$$

y en ella advertirémos en primer lugar que los quatro números 6, 9, 12 y 15 son todos exâctamente divisibles por 3. Tomando pues la tercera parte de todos los términos que entran en la equacion, se transformará en estotra: $2abx-3bcd=4bdx+5abc$.

En segundo lugar observarémos que la letra b se halla en todos los términos combinada con otras por multiplicacion, y de consiguiente es un factor comun de todos ellos. La podemos pues suprimir enteramente sin alterar por eso la igualdad de los dos nuevos miembros; y asi resultará:

$$2ax-3cd=4dx+5ac.$$

Aplicando ahora á esta última equacion las reglas prescritas (§§. 10 y 11) deducirémos estas otras:

$$2ax-4dx=5ac+3cd,$$

$$x(2a-4d)=5ac+3cd,$$

$$x=\frac{5ac+3cd}{2a-4d}.$$

13 Aunque todas las reglas hasta aquí establecidas se puedan aplicar inmediatamente aun á las equaciones cuyos términos tengan divisores ó denominadores siempre que ninguno de estos sea la misma incógnita, es mucho mas sencillo reducir previamente en tal caso todos los términos á quebrados que tengan un mismo denominador, para poder despues suprimir enteramente este denominador ó divisor comun. Esta supresion no debe alterar la igualdad de los dos miembros, porque (*Aritm.* §. 57) equivale á multiplicar por un mismo número todas las partes de dos cantidades iguales.

Sea por exemplo la equacion numérica:

$$\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7};$$

y como ya sabemos reducir los quebrados á un comun denominador, y los enteros á quebrados de qualquiera denominacion dada, podrémos fácilmente transformar todos los términos de la equacion propuesta en quebrados que tengan un mismo denominador.

Comenzando por reducir las tres fracciones

$$\frac{2x}{3},\ \frac{4x}{5},\ \frac{5x}{7};$$

las transformarémos en estotras:

$$\frac{5\times7\times2x}{5\times7\times3},\ \frac{3\times7\times4x}{3\times7\times5},\ \frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7}.$$

Pasando despues á convertir los enteros 4 y 12 en quebrados que tengan el denominador comun representado por la combinacion de factores $5\times7\times3$, se transformarán en estas fracciones impropias:

$$\frac{5\times7\times3\times4}{5\times7\times3},\ \frac{5\times7\times3\times12}{5\times7\times3}.$$

Y sustituyendo las cinco fracciones que de las dos trans-

formaciones han resultado, en lugar de los cinco términos de la equacion, resultará expresada de este modo:

$$\frac{5\cdot7\cdot2x}{5\cdot7\cdot3}+\frac{5\cdot7\cdot3\cdot4}{5\cdot7\cdot3}=\frac{3\cdot7\cdot4x}{3\cdot7\cdot5}+\frac{5\cdot7\cdot3\cdot12}{5\cdot7\cdot3}-\frac{3\cdot5\cdot5x}{3\cdot5\cdot7}.$$

Suprimiendo ahora de todos los términos el denominador comun, se reducirá la equacion á esta:

$$5\times7\times2x+5\times7\times3\times4=3\times7\times4x+5\times7\times3\times12-3\times5\times5x,$$

la qual viene á ser estotra:

$$70x+420=84x+1260-75x;$$

y á esta última ya es fácil aplicar las reglas anteriormente prescritas (§§. 10 y 11). Así que trasponiendo tendremos: $70x+75x-84x=1260-420$;
y efectuando las adiciones y sustracciones indicadas en los dos miembros de esta equacion quedará reducida á esta: $61x=840$;
de la qual se infiere: $x=\frac{840}{61}=13\frac{47}{61}$.

Reflexîonando sobre lo que hemos practicado para transformar la equacion propuesta

$$\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7},$$

en estotra: $70x+420=84x+1260-75x$,
en la qual han desaparecido las fracciones sin haberse alterado la igualdad de los dos miembros; vemos que todo está reducido á *haber multiplicado el numerador de cada fraccion por el producto de los denominadores de todas las otras, y á multiplicar los enteros por el producto de todos los denominadores*.

Esto mismo se puede executar en qualquiera otra equacion numérica, y aun en las literales, sin mas diferencia que la de meramente indicar en estas las multiplicaciones, que por ser los denominadores números particulares y determinados podemos efectuar en aquellas.

Sea, por exemplo, la equacion literal:

$$\frac{ax}{b} - c = \frac{dx}{e} + \frac{fg}{h};$$

y haciendo lo mismo que hemos executado en la numérica anterior, la transformarémos en estotra:

$$eh \times ax - beh \times c = bh \times dx + be \times fg;$$

resultado que puede escribirse con mayor sencillez, poniendo con arreglo al convenio adoptado (§. 7) todas las letras que sean factores de un mismo producto á continuacion unas de otras sin interposicion de signo alguno, y aun si se quiere, colocándolas segun el órden que guardan en el alfabeto, porque así es mas fácil enunciarlas. Tendremos pues:

$$aehx - bceh = bdhx + befg.$$

De esta equacion se deducen (§§. 10 y 11) estotras:

$$aehx - bdhx = befg + bceh;$$

$$x(aeh - bdh) = befg + bceh;$$

$$x = \frac{befg + bceh}{aeh - bdh}.$$

14 Estas reglas son suficientes para resolver las equaciones del primer grado que tengan una sola incógnita, y conseguir que esta quede enteramente despejada de todas las cantidades conocidas, con las quales pueda estar combinada en la equacion primitiva, que inmediatamente se deduce de la propuesta del problema; y aunque para formar esta equacion fundamental ó poner el problema en equacion no pueda establecerse, como ya hemos dicho (§. 8), regla alguna general, puede en su defecto sernos muy útil la siguiente, que aplicada con inteligencia no dexará de conducirnos al objeto que nos proponemos:

Represéntense por guarismos ó mas bien por letras

todas las cantidades conocidas ó dadas que entren en la qüestion, y por una letra la incógnita; y hágase el mismo razonamiento, é indiquense con el auxîlio de los signos algebráicos las mismas operaciones que se deberian efectuar en el caso en que suponiendo conocido el valor de la incógnita tratásemos solo de comprobarlo, ó de averiguar si tenia todas las condiciones que la propuesta requiere.

Ya se dexa entender que no es posible hacer un uso acertado de esta regla sin haber ante todas cosas desenvuelto todas las relaciones que la propuesta de la qüestion establezca entre la incógnita y las cantidades conocidas, ó lo que es lo mismo, sin haber previamente puesto en claro qué operaciones nos prescribe explícita ó implícitamente la misma propuesta; y en esto cabalmente consiste toda la dificultad de poner en equacion un problema. Con todo, para hacer ver el mucho partido que se puede sacar de la regla anterior, la aplicarémos á algunos exemplos.

1.° *Distribuir un número dado* a *en tres partes desiguales, que tengan entre sí las mismas razones que los números tambien dados* m, n, p.

Teniendo ya representadas por letras las quatro cantidades conocidas que entran en la qüestion, representarémos por la letra x ú otra qualquiera de las últimas del abecedario qualquiera de las tres partes desconocidas. Sea, por exemplo, la primera de las tres; y para que se vea que ya no es necesario representar por nuevas letras las otras dos partes restantes, harémos el siguiente razonamiento:

Si conociéramos la primera parte que buscamos, formaríamos para hallar la segunda esta proporcion:

$m : n :: x :$ *la segunda parte;*

porque la propuesta nos prescribe que la primera parte debe ser á la segunda como la cantidad conocida m es á la cantidad tambien conocida n. Estará pues bien representada la segunda parte por $\frac{nx}{m}$, expresion del quarto término de aquella proporcion, en la qual se suponen conocidos los otros tres.

Del mismo modo para hallar la parte restante formaríamos estotra proporcion:

$m : p :: x :$ *la parte tercera;*

porque la propuesta nos prescribe que la primera parte debe ser á la tercera como m es á p; y de consiguiente la última parte estará bien representada por $\frac{px}{m}$, expresion del quarto término de la última proporcion, en la qual se suponen conocidos los otros tres.

Ahora bien, si suponiendo conocidas las tres partes, y sabiendo que ya guardan entre sí la proporcionalidad expresamente prescrita en la propuesta, quisiéramos cerciorarnos de si estaban ó no bien determinados los valores de todas ellas, las sumaríamos con el fin de averiguar si la suma era igual al número que nos proponemos repartir, porque así lo exîge, bien que implícitamente, la misma propuesta. Tendrémos pues esta equacion:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a.$$

Con esto habrémos conseguido, como nos proponíamos, poner en equacion el problema; y lo único que nos restará hacer será despejar la incógnita, valiéndonos para ello de las reglas prescritas (§§. 11 y 13).

Por de contado no será necesario *trasponer* término alguno, porque se hallan con separacion en un solo miembro todos los términos que contienen la incógnita; y como los dos términos fraccionarios tienen un mismo denominador, solo habrá que reducir á fracciones los dos enteros para poder suprimir enteramente el denominador. Así resultarán las equaciones siguientes:

$$mx + nx + px = am;$$

$$x(m + n + p) = am;$$

$$x = \frac{am}{m + n + p}.$$

Este resultado final ó fórmula que ya nos está indicando la serie de operaciones que se deben efectuar con las cantidades conocidas para determinar el valor de la incógnita, no es mas que la traduccion algebráica de la regla llamada de *compañía* (*Aritm.* §. 171); porque suponiendo que m, n, p representen los capitales de tres socios, y a la ganancia total ó *dividendo*, las qüestiones de compañía se reducen á la que acabamos de resolver; la combinacion $m + n + p$ representará el fondo total de la compañía; y la expresion

$$x = \frac{am}{m + n + p}$$

nos indicará que para determinar la parte de ganancia que corresponde al socio que contribuyó con la cantidad m, se ha de multiplicar por esta la ganancia total a, y el producto se ha de partir por el fondo total $m + n + p$. Esto equivale á decir que se ha de formar esta proporcion:

$$m + n + p : m :: a : x;$$

la qual traducida al lenguage vulgar viene á ser la misma que hemos formado en la Aritmética, á saber: *el*

fondo total de la compañía es al capital de uno de los socios, como la ganancia total es á la porcion que de ella le corresponde.

Parece inútil advertir que en habiendo determinado el valor de la incógnita x, las expresiones $\frac{nx}{m}$, $\frac{px}{m}$ nos prescriben las operaciones que deberémos executar para hallar los de las otras dos cantidades desconocidas.

2.° *Se pusieron dos á jugar con otros, y ambos perdieron, el uno 12 rs. y el otro 57 rs.; el dinero con que este segundo se levantó del juego era la quarta parte del que al primero le habia quedado, siendo así que para ponerse á jugar sacó el uno tantos reales como el otro.* Se pregunta: *¿con quántos reales se puso á jugar cada uno de los dos?*

Bien se dexa ver que si suponiendo ya conocido este número incógnito tratásemos solo de averiguar si se verificaban todas las condiciones de la propuesta, restaríamos de él los 12 rs. que perdió uno de los jugadores; de igual número restaríamos tambien los 57 rs. que perdió el otro; y sabiendo por este medio quánto habia quedado á cada uno, exâminaríamos si el segundo residuo era, como debia ser, la quarta parte del primero.

Pues lo mismo cabalmente executarémos quando representemos por x el número de reales que cada uno de los dos sacó para jugar; por a los 12 rs. que perdió el primero, y por b los 57 rs. que perdió el segundo. Restarémos a de x, y el residuo será $x-a$; restarémos asimismo b de x, y el residuo será $x-b$: y como sea una de las condiciones de la propuesta que este segundo residuo haya de ser la quarta parte del primero, esta misma condicion, traducida al lenguage algebrái-

co, se transformará en esta equacion:

$$x-b=\frac{x-a}{4}.$$

Aunque en realidad está ya puesto en equacion el problema, es del caso notar que pudimos deducir de la misma propuesta una equacion sin quebrado alguno; porque si el segundo residuo representado por $x-b$ debe ser la quarta parte del primero representado por $x-a$, es consiguiente que quatro veces aquel sea igual á este. Pero ¿cómo representaremos el quadruplo de aquel residuo sin tener previamente conocido el valor del mismo residuo? No es necesario reflexîonar mucho para ver que la analogía nos conduce á representar aquel quadruplo por una de estas dos expresiones:

$$4(x-b);\ 4x-4b.$$

En efecto, si un minuendo *menos* un sustraendo representa un residuo, es forzoso que la combinacion de quatro minuendos *menos* quatro sustraendos represente quatro residuos ó el quadruplo de un residuo. Y cotejando las dos últimas expresiones, que como es fácil demostrar, son equivalentes, vendremos á convencernos de que *lo mismo es restar primeramente una cantidad de otra, y multiplicar despues por qualquier número el residuo, que multiplicar primeramente por el mismo multiplicador el minuendo y el sustraendo, y restar despues un producto de otro.* La inversion del órden de estas operaciones no produce alteracion alguna en el resultado final.

Si pues el quadruplo del segundo residuo debe ser igual al primero, tendremos esta equacion:

$$4x-4b=x-a;$$

de la qual se deducen facilísimamente estotras:

$$4x - x = 4b - a;$$

$$3x = 4b - a;$$

$$x = \frac{4b - a}{3}.$$

Esta última fórmula nos está prescribiendo que *del quadruplo de la pérdida mayor restemos la menor, y que del residuo tomemos la tercera parte, para que nos resulte el número que buscábamos.*

3.° *Un pescador, con el objeto de estimular á un hijo suyo al trabajo, promete darle 5 quartos por cada lance en que este saque pesca, con la condicion de que por cada lance en que no la saque le descontará 3 quartos. Despues de 12 lances ajustaron cuentas, y tuvo el padre que pagar al hijo 28 quartos.* Se pregunta: *en quántos lances de los 12 sacó el hijo pesca, y en quántos no?*

Siendo por suposicion 12 todos los lances, si representamos por x el número de los lances felices, el de los infructuosos resultará bien representado por la combinacion $12 - x$. Ahora bien, si como estos son unos meros símbolos de dos números que no conocemos, fueran los mismos números que deseamos conocer, ¿qué haríamos para comprobar el ajuste de cuentas? Claro es que multiplicaríamos 5 quartos por el número de lances felices, y 3 quartos por el de los infructuosos; restaríamos del primer producto el segundo, y el residuo ó alcance á favor del hijo deberia ser 28 quartos, para que el resultado final fuese, como debe ser, enteramente conforme con la propuesta de la qüestion.

Pues del mismo modo multiplicaremos 5 por x, y el producto estará representado por $5x$; multiplicarémos igualmente $12 - x$ por 3, y el producto estará bien representado por la combinacion $36 - 3x$. Des-

pues de haber executado las dos multiplicaciones, ó mas bien despues de haber representado los dos productos, deberémos restar de $5x$, que representa la deuda del padre, la cantidad $36-3x$ que representa la del hijo, y el residuo deberá ser igual á 28. Pero ¿cómo podremos restar de $5x$ la cantidad representada por la combinacion $36-3x$ sin haber antes quitado $3x$ de 36, segun lo está indicando la última expresion?

Para superar esta dificultad tengamos presente que *si en dos sustracciones hay un mismo minuendo y distintos sustraendos, quanto tenga uno de estos mas que el otro, tanto cabalmente tendrá menos que el residuo correspondiente al menor sustraendo el correspondiente al mayor.* Si pues habiendo de restar 36 de $5x$ representamos el residuo por la combinacion $5x-36$, quando hayamos de restar del mismo minuendo $5x$ la cantidad representada por $36-3x$, que tiene $3x$ menos que el anterior sustraendo 36, el nuevo residuo deberá tener $3x$ mas que el anterior, y de consiguiente estará bien representado por la combinacion $5x-36+3x$. Tendremos pues con arreglo á la propuesta la siguiente equacion: $5x-36+3x=28$;

de la qual se deducen fácilmente estotras:

$$5x+3x=28+36;$$

$$8x=64;$$

$$x=\tfrac{64}{8}=8.$$

Son pues 8 los lances felices, y de consiguiente 4 los infructuosos. En efecto,

Por 8 de los primeros á 5 quartos cada uno debe el padre......................................	40 quartos.
Por 4 de los segundos á 3 quartos cada uno debe el hijo......................................	12 quartos.

Resultan pues de alcance á favor de este 28 quartos, segun lo exîgia la propuesta del problema.

Si quisiéremos generalizar la solucion, representarémos por a el número de quartos que el padre prometió dar al hijo por cada lance feliz; representarémos asimismo por b el número de quartos que determinó descontarle por cada lance infructuoso; por c el número de todos los lances, y por d el número de quartos que en el ajuste de cuentas resultaron de alcance contra el padre y á favor del hijo. Designarémos como antes por x el número de los lances felices, y á conseqüencia estará bien representado el de los infructuosos por la combinacion $c-x$, sin necesidad de emplear para esto otra nueva letra.

Ahora bien, si por cada lance feliz debe el padre al hijo a quartos, por el número x de lances felices le deberá ax quartos. Y si por cada lance infructuoso debe el hijo al padre b quartos, por el número $c-x$ de lances infructuosos le deberá el producto de aquellos dos números, el qual estará representado por $b(c-x)$, ó por $bc-bx$.

Para quitar ahora este producto, que representa la deuda del hijo, del producto ax que representa la del padre, harémos el mismo razonamiento que quando designábamos con guarismos los números conocidos, y dirémos: si de ax hubiésemos de sustraer bc, el residuo estaria bien representado por la combinacion $ax-bc$; con que habiendo de quitar del mismo minuendo ax la cantidad representada por $bc-bx$, la qual tiene bx menos que bc, el nuevo residuo deberá tener la misma cantidad bx mas que el anterior, y deberá representarse por $ax-bc+bx$. Y puesto que segun la propuesta de

la qüestion este último residuo, que representa el alcance á favor del hijo, debe ser igual á la cantidad d, tendremos esta equacion:

$$ax - bc + bx = d;$$

de la qual se deducen estotras:

$$ax + bx = d + bc;$$
$$x(a + b) = d + bc;$$
$$x = \frac{d + bc}{a + b}.$$

Esta fórmula, que nos indica qué operaciones debamos executar con los quatro números conocidos para determinar el incógnito, se puede fácilmente transformar en una regla general con solo traducirla al lenguage vulgar, como ya lo hemos practicado con algunas otras; pero aun sin necesidad de executar esta traduccion puede servirnos para resolver todos los problemas semejantes al propuesto, con solo sustituir los números que en cada caso particular se nos den conocidos en lugar de las letras con que en la fórmula estan representados. Haciendo uso de este segundo medio para completar la solucion del problema particular propuesto, nos resultará esta expresion:

$$x = \frac{28 + 3 \times 12}{5 + 3};$$

y efectuando las operaciones indicadas vendrá á ser

$$x = \frac{28 + 36}{8} = \frac{64}{8} = 8;$$

como antes hemos hallado.

15 Si para resolver qualquier problema que tenga una sola incógnita hemos de deducir en primer lugar de su propuesta una equacion, es consiguiente que toda equacion ya formada y expresada en lenguage alge-

bráico pueda considerarse como procedente de una qüestion, cuya propuesta se hallará fácilmente traduciendo al lenguage vulgar la expresion que se nos dé en el simbólico. Así se podrá ver sin dificultad que la equacion

$$\frac{3x}{4}+7=8x-12$$

pertenece á este problema:

Hallar un número x *tal que si á sus tres quartas partes se añaden 7, la suma sea igual al residuo que resulte quitando 12 de ocho veces el mismo número desconocido.*

Asimismo traduciendo al lenguage vulgar la equacion: $ax+bc-cx=ac-bx$,
en la qual suponemos que las letras a, b, c representan cantidades conocidas, y x la incógnita, verémos que debe haber provenido de esta qüestion:

Hallar un número x *tal que multiplicándolo por el número dado* a; *sumando con este producto el de los dos números dados* b *y* c; *y restando de la suma el producto de los números* c *y* x, *el residuo sea igual al que resulte quitando del producto de los dos números dados* a *y* c *el de los números* b *y* x.

Del mismo modo podremos venir en conocimiento de las qüestiones que deben haber dado orígen á quantas equaciones se nos propongan de la misma especie; es decir: podremos enunciar en lenguage vulgar las relaciones que la propuesta establecia entre las cantidades conocidas y la incógnita. Por lo demas ya hemos dicho (§. 4) que una misma relacion se puede enunciar de varios y muy distintos modos.

Exercitándose mucho en traducir del lenguage ordinario al simbólico y al contrario, como se practica en

el estudio de qualquier idioma extraño, se familiarizarán los principiantes con el Algebra, cuya dificultad apenas consiste en otra cosa que en la perfecta inteligencia de la representacion de los caractéres y signos, y del modo de hacer uso de ellos.

Reglas para efectuar en quanto es posible con las cantidades representadas por letras las operaciones aritméticas.

16 En las qüestiones que hasta aquí hemos resuelto se puede ya haber conocido la necesidad de saber representar con los símbolos y signos algebráicos el resultado final de una ó mas operaciones aritméticas executadas con cantidades de valor indeterminado ó desconocido; y aunque el representar los resultados de la adicion, sustraccion, multiplicacion y division no pueda propiamente llamarse executar estas operaciones, se le da sin embargo el nombre de aquella con la qual tenga mas analogía.

Quando nos proponemos reunir muchas expresiones algebráicas en una sola equivalente al conjunto de todas ellas, llamamos á esto *sumar cantidades algebráicas.*

Quando representamos el residuo que debe quedar en quitando de una expresion algebráica alguna otra, llamamos á esto *restar.*

Quando representamos por el conjunto de varias expresiones de productos parciales el resultado de una multiplicacion, llamamos á esto *multiplicar.*

Finalmente, quando representamos por el conjunto de varias expresiones de quocientes parciales el resultado de una division, llamamos á esto *dividir.*

Pero todas estas operaciones se diferencian de las que hemos executado en la Aritmética, en que no siendo sus resultados sino unas meras indicaciones de otras operaciones que aun nos resta efectuar, no presentan las mas veces otra cosa que una transformacion de la serie de operaciones primitivamente indicadas, en otra que debe producir el mismo efecto y conducir al mismo resultado, sin mas diferencia que la de darnos de este expresiones mas sencillas, ó presentárnoslo baxo una forma mas acomodada al intento que nos proponemos.

Conviene advertir que á cada una de las expresiones que hemos llamado *términos*, se le da tambien el nombre de *monomio* ó de *cantidad monomia;* á la combinacion de dos términos ó de dos *monomios* se la llama *binomio;* la combinacion de tres términos ó *monomios* se llama *trinomio;* la de quatro *quadrinomio;* y generalmente la combinacion de muchos términos ó monomios se denomina *polinomio*. Qualquier *monomio* se llama tambien *cantidad incomplexa;* y todo *polinomio* desde el *binomio* en adelante se llama *cantidad complexa*. Cada una de las expresiones $2a$, $3ab$, $5bdf$ &c. es un *monomio* ó *una cantidad incomplexa;* qualquiera de las combinaciones $a+b$, $3a-5c$, $8bd-5ac$ &c. es un *binomio*; qualquiera de las combinaciones $4a-3b+2x$, $5cf+4ab+3dx$ &c. es un *trinomio*; y así de las demas combinaciones de términos.

De la adicion de las cantidades algebráicas.

17 Quando son *monomias* todas las cantidades que nos proponemos sumar, se executa la adicion, ó mas bien se representa la suma formando una combinacion de

todas ellas, sin otra alteracion que la de tener interpuesto entre cada dos el signo $+$. Así la suma de las cantidades a, b, c, d &c. se representa por la combinacion

$$a+b+c+d+\&c.$$

la suma de las cantidades *monomias* $2ax$, $3b$, $4cd$, $5f$ &c. se representa por la combinacion

$$2ax+3b+4cd+5f+\&c.;$$

pero es de notar que esta combinacion de *monomios*, ó lo que es lo mismo, este *polinomio*, que representa la suma, puede en muchos casos simplificarse reuniendo dos ó mas términos en uno solo, y reduciendo por este medio la combinacion total al menor número de términos que sea posible.

Esta reunion ó reduccion es la misma que ya hemos efectuado (§§. 2 y 5) quando hemos sustituido en lugar del *binomio* $x+x$ el *monomio* equivalente $2x$; y en lugar del *trinomio* $x+x+x$ el *monomio* equivalente $3x$; por medio de los quales exemplos es fácil echar de ver que la reduccion de que hablamos solo puede tener lugar quando una misma letra se halle repetida en muchos términos, ó quando sean comunes á muchos términos los mismos factores literales ó algebráicos. Estos términos se llaman en tal caso *términos semejantes*, y la reunion de todos estos en uno que equivalga á la combinacion de ellos, se llama *reduccion de términos semejantes*. En tal caso se considera la letra comun ó el conjunto de factores comunes como si fuese una unidad, la qual está repetida tantas veces quantos sean los términos en que se halle, quando ninguno de estos tiene ningun factor numérico. Así es que $a+a+a+a$ equivale á $4a$; $bc+bc+bc+bc+bc$ equivale á $5bc$. Pero si los términos semejantes tuviesen factores numéricos, la com-

binacion de términos equivaldrá á la letra comun ó al conjunto de factores tomado tantas veces como unidades tenga la suma de los factores numéricos. Así que $4a + 3a + 5a$ equivale á $12a$; la combinacion $3bcd + 7bcd + 2bcd + 6bcd$ equivale á $18bcd$.

Se efectúa pues la adicion de los términos semejantes con los números que van antepuestos á las cantidades literales, los quales indican quántas veces está tomada en cada término la cantidad comun. Estos números se llaman *coeficientes*, y cada uno de ellos es multiplicador de la letra ó producto á que está antepuesto; debiéndose tener entendido que quando en un término no haya ningun número antepuesto á la cantidad literal, el coeficiente es 1; de modo que a, por exemplo, es lo mismo que $1a$; y así el binomio $a + 4a$ se reducirá al monomio equivalente $5a$; al trinomio $bc + 2bc + 5bc$ equivaldrá el monomio $8bc$.

18 Quando tratemos de representar la suma de dos ó mas polinomios, es bien claro que si todos estos fueren resultados de otras adiciones anteriores, ó lo que es lo mismo, si todos los términos de los polinomios fueren *aditivos*, la suma total deberá componerse de todas las partes de los sumandos. Así la suma de los binomios

$$4a + 5b \text{ y } 2c + 3d$$

estará bien representada por la combinacion de los quatro monomios

$$4a + 5b + 2c + 3d;$$

porque en realidad esto se reduce á decir que sumar primeramente dos cantidades qualesquiera, sumar despues otras dos, y sumar por último las dos sumas, es lo mismo que sumar de una vez los quatro sumandos que entran en ellas.

Si alguno de los polinomios que se hayan de sumar fuese resultado de alguna sustraccion anterior, ó lo que es lo mismo, si fuese sustractivo alguno de los términos de los sumandos, deberá serlo igualmente en el resultado, y aparecer en la suma con el mismo signo — con que antes se hallaba. Así la suma de los dos binomios

$$4a + 5b \text{ y } 2c - 3d$$

estará bien representada por la combinacion de los quatro monomios ó por el *quadrinomio*

$$4a + 5b + 2c - 3d;$$

porque sumar primeramente dos cantidades qualesquiera, restar despues de otra cantidad otra qualquiera, y sumar por último este residuo con aquella primera suma, es lo mismo que sumar las tres primeras cantidades, y restar de esta suma la cantidad que antes fue *sustraendo*.

Los dos exemplos que acabamos de poner, bastan para hacer ver que la operacion llamada *adicion de los polinomios se efectúa escribiendo todos los términos que haya en los sumandos, á continuacion unos de otros y con sus propios signos, teniendo presente que los términos que en los sumandos esten sin signo alguno, se deben considerar como aditivos, ó como si tuviesen antepuesto el signo +.*

Si en los sumandos hubiese algunos términos semejantes se podrán estos reducir á uno solo en la suma, efectuando con los coeficientes las operaciones indicadas por los signos que les esten antepuestos.

Propongámonos, por exemplo, sumar los trinomios

$$4a + 9b - 2c,$$
$$2a - 3c + 4d,$$
$$7b + c + e;$$

y conforme á la regla antecedente la suma estará bien

representada por el siguiente polinomio, en el qual se hallan reunidos con sus propios signos todos los términos de los tres sumandos:

$$4a + 9b - 2c + 2a - 3c + 4d + 7b + c - e.$$

Viendo ahora que al binomio $4a + 2a$ es equivalente el monomio $6a$; que al binomio $9b + 7b$ equivale el monomio $16b$; que los términos sustractivos $-2c$ y $-3c$ deben producir en el resultado el mismo efecto que el monomio sustractivo $-5c$; y por último, que restar por una parte $5c$, y añadir por otra $1c$, es lo mismo que quitar $4c$, vendrá á reducirse aquella primera expresion de la suma á estotra equivalente mucho mas sencilla:

$$6a + 16b - 4c + 4d - e.$$

19 Para la reduccion de los términos semejantes, que puede y con freqüencia suele tener lugar en los resultados de todas las operaciones algebráicas, puede servir de gobierno la siguiente

Regla general: *Si todos los términos semejantes fuesen aditivos, la combinacion de todos ellos equivaldrá á un solo término aditivo, que tenga la misma letra ó los mismos factores algebráicos, y por coeficiente ó factor numérico la suma de todos los coeficientes de todos los términos que intentemos reducir.*

Si todos fuesen sustractivos, la combinacion de ellos equivaldrá á un solo término ó monomio sustractivo, que tenga la misma letra ó los mismos factores algebráicos, y por coeficiente la suma de los coeficientes de todos los términos que intentemos reducir.

Si de los términos semejantes unos fuesen aditivos y otros sustractivos, se reducirán los primeros al monomio aditivo equivalente, é igualmente los segundos al

equivalente monomio sustractivo; y en caso que sean iguales los coeficientes de estos dos monomios, desaparecerá enteramente del resultado la combinacion de aquellos términos semejantes, como que se reducen á cero, ó se destruyen mutuamente; pero quando sean desiguales las sumas de los coeficientes aditivos y sustractivos, se restará la menor de la mayor, y el residuo será el coeficiente del monomio equivalente á la combinacion de términos semejantes, el qual tendrá el mismo signo que la mayor de las dos sumas.

Para exercicio de nuestros lectores pondremos aquí algunos otros exemplos de adiciones algebráicas con sus resultados.

Exemplo 1.

$$\textit{Sumandos}\ldots\begin{cases}7m+3n-14p+17r\\3a+9n-11m+2r\\5p-4m+8n-13r\\11n-2b-6r-m+s.\end{cases}$$

$$\textit{Suma.}\begin{cases}7m+3n-14p+17r+3a+9n-11m+2r\\+5p-4m+8n-13r+11n-2b-6r-m+s.\end{cases}$$

Reduciendo términos semejantes se simplificará la expresion de la suma, y se transformará en estotra:

$$-9m+31n-9p+3a-2b+s;$$

en la qual se ve que la combinacion de términos semejantes $7m-11m-4m-m$ se ha reducido al monomio sustractivo $-9m$, porque 7 es el único coeficiente aditivo, y la suma de los sustractivos es 16; que el quadrinomio $3n+9n+8n+11n$ se ha reducido al monomio aditivo $31n$, porque aquellos quatro términos son todos aditivos; que el binomio $-14p+5p$ se ha re-

ducido al monomio sustractivo $-9p$; y por último, que han desaparecido enteramente los términos que contenian la letra r, porque en la combinacion $17r+2r-13r-6r$ la suma de los coeficientes aditivos es igual á la de los sustractivos.

En la colocacion de los términos de un polinomio se puede guardar el órden que se quiera ó que mas acomode; pero por lo comun ocupa el primer lugar, comenzando por la izquierda, un término aditivo, sea el que fuere, por parecer muy impropio comenzar restando sin suponer de qué. Por esta razon los términos de la última expresion que hemos hallado de la suma, se podrán colocar en este órden:

$$31n-9m-9p+3a-2b+s.$$

Exemplo II.

$$\text{Sumandos...}\begin{cases}11bc+4ad-8ac+5cd\\8ac+7bc-2ad+4mn\\2cd-3ab+5ac+an\\9an-2bc-2ad+5cd.\end{cases}$$

$$\text{Suma.}\begin{cases}11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad+4mn\\+2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc-2ad+5cd.\end{cases}$$

Reduciendo términos semejantes vendrá á ser:

$$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an.$$

De la sustraccion de las cantidades algebráicas.

20 Con arreglo al convenio generalmente adoptado (§. 2) se indica la sustraccion de los monomios poniendo el signo $-$ á la izquierda del sustraendo; y la

combinacion del minuendo y del sustraendo con el signo — antepuesto á este segundo representa el residuo que debe resultar de la sustraccion. Así quando de la cantidad a tengamos que quitar la cantidad b, escribiremos $a-b$ para representar el residuo; si de la cantidad $8bc$ hubiésemos de restar la cantidad $3mn$, escribiremos $8bc-3mn$ para representar el residuo.

Si los dos monomios, minuendo y sustraendo, fuesen semejantes, la expresion del residuo se podrá simplificar y reducir á un solo término, que tenga por coeficiente la diferencia de los coeficientes de aquellos dos monomios. Por manera que si de $8bc$ hubiésemos de restar $3bc$, la expresion $8bc-3bc$ que representa el residuo, podria simplificarse y reducirse al solo monomio $5bc$. Aun antes de ahora hemos executado reducciones de esta especie, porque se conoce á primera vista la razon de ellas.

Por lo que respecta á la sustraccion de los polinomios se deben distinguir dos casos:

1.° *Si el sustraendo representase la suma de muchos monomios*, ó lo que es lo mismo, *si todos los términos del sustraendo fuesen aditivos ó tuviesen antepuesto el signo* $+$, *se representará el residuo escribiendo el minuendo segun nos lo hayan dado, y á su continuacion el sustraendo, anteponiendo á todos los términos de este el signo* $-$; porque, como es bien sabido, lo mismo es quitar de una vez una cantidad qualquiera, que quitar sucesivamente todas las partes de que esta se componga.

Si, por exemplo, de la cantidad representada por el trinomio $5a-9b+2c$ quisiéremos quitar la representada por el trinomio $2d+3e+4f$, representaremos

el residuo por la siguiente combinacion:

$$5a - 9b + 2c - 2d - 3e - 4f.$$

2.° *Si de los términos del sustraendo unos fuesen aditivos y otros sustractivos*, ó lo que es lo mismo, *si unos tuviesen antepuesto el signo +, y otros el signo —; quando escribamos el sustraendo á continuacion del minuendo para representar el residuo, á los términos del sustraendo que tenian el signo + les antepondremos el signo —, y á los que tenian el signo — les antepondremos el signo +.* De modo que si nos proponemos restar de la cantidad representada por el trinomio $7m - 4n + 8q$, la representada por el quadrinomio $6a - 3f + 2b - 9c$, representarémos el residuo por esta combinacion:

$$7m - 4n + 8q - 6a + 3f - 2b + 9c.$$

La razon de lo que esta regla prescribe la hemos expuesto en la solucion del tercer problema que propusimos en el §. 14; y aplicándola al exemplo que acabamos de proponer dirémos que si de la cantidad $7m - 4n + 8q$ hubiésemos de restar el binomio $6a + 2b$, el residuo estaria bien representado por la combinacion

$$7m - 4n + 8q - 6a - 2b;$$

pero como el sustraendo propuesto $6a - 3f + 2b - 9c$, equivalente á $6a + 2b - 3f - 9c$, tenga menos que $6a + 2b$ la cantidad representada por $3f + 9c$, el residuo deberá tener esta misma cantidad mas, y de consiguiente deberá representarse por

$$7m - 4n + 8q - 6a - 2b + 3f + 9c;$$

á cuya expresion equivale la que antes hemos hallado.

Reuniendo ahora en una sola regla general las particulares que acabamos de establecer, deducirémos por conclusion que *la sustraccion de las cantidades algebráicas se efectúa escribiendo á continuacion del minuendo*

el sustraendo despues de haber cambiado de + en —, y de — en + los signos de este último.

Despues de puesta en execucion esta regla, si en el resultado hubiese términos semejantes, se hace la reduccion de ellos conforme á los preceptos establecidos (§. 19).

Exemplo I.

Minuendo... $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$
Sustraendo. $11c - 27b + 51a - 4d$

Residuo..... $\left\{\begin{array}{l}17a + 2m - 9b - 4c + 23d - 11c + \\ 27b - 51a + 4d.\end{array}\right.$

Efectuando la reduccion de los términos semejantes resultará estotra expresion:

$$-34a + 2m + 18b - 15c + 27d;$$

ó mas bien: $2m - 34a + 18b - 15c + 27d.$

Exemplo II.

Minuendo... $5ac - 8ab + 9bc - 4am$
Sustraendo. $8am - 7cd + 11ac - 2ab$

Residuo..... $\left\{\begin{array}{l}5ac - 8ab + 9bc - 4am - 8am + 7cd \\ -11ac + 2ab.\end{array}\right.$

Y reduciendo términos semejantes se tendrá estotra expresion:

$$-6ac - 6ab + 9bc - 12am + 7cd;$$

ó mas bien estotra:

$$9bc - 6ac - 6ab - 12am + 7cd.$$

Bueno será advertir que sin necesidad de mudar los signos de los términos del sustraendo *se puede represen-*

tar el residuo escribiendo el minuendo, y á continuacion el sustraendo, qual nos lo hayan dado, bien que encerrado dentro de un paréntesis con el signo — á la izquierda de este. Por manera que si del trinomio $5a-3b+7c$ nos proponemos restar el quadrinomio $4m-6n+3p-8q$, podemos representar el residuo de este modo:

$$5a-3b+7c-(4m-6n+3p-8q);$$

y de consiguiente esta expresion es equivalente á estotra:

$$5a-3b+7c-4m+6n-3p+8q,$$

que por la regla anterior hubiéramos hallado.

A esto es consiguiente que en habiendo en un polinomio varios términos sustractivos podamos considerar al conjunto de estos como un sustraendo, y encerrarlos con el signo + dentro de un paréntesis, anteponiendo á este el signo —. Así la última expresion que en el exemplo segundo hemos hallado, equivaldrá á estotra:

$$9bc+7cd-(6ac+6ab+12am).$$

No es necesario para dar esta forma á qualquier polinomio que todos los términos que se hayan de encerrar dentro del paréntesis sean anteriormente sustractivos; basta que lo sea alguno de ellos, y que á todos los que se pongan dentro del paréntesis se les mude el signo. Así la misma expresion se podrá transformar en estotras:

$$9bc-6ac-(6ab+12am-7cd);$$
$$9bc-(6ac+6ab+12am-7cd);$$
$$9bc-6ac-6ab-(12am-7cd);$$

&c. &c. &c.

las quales no son otra cosa que indicaciones de distintos modos de obtener el mismo resultado. [1]

[1] Será muy conveniente que los principiantes se exerciten mucho en buscar las varias expresiones equivalentes de un mismo resul-

De la multiplicacion de las cantidades algebráicas.

21 Mientras no consideremos á las letras sino como símbolos de números, deberémos formarnos de la multiplicacion algebráica la misma idea que de la multiplicacion aritmética (*Aritm.* §. 21 y 68). Por manera que *multiplicar* a *por* b *es hallar*, ó por mejor decir, *es representar una tercera cantidad que se haya con respecto á qualquiera de aquellos dos factores, del mismo modo que el otro factor se ha con respecto á la unidad.*

Ya hemos dado á conocer (§§. 2 y 7) los varios modos de indicar la multiplicacion algebráica, y de representar el producto. El de a por b, por exemplo, se representa por $a \times b$, ó por $a . b$, ó finalmente por ab sin interposicion de signo alguno.

Ocurre con freqüencia tener que representar el producto de varias multiplicaciones sucesivas, como por exemplo la de a por b; despues la del producto ab por c; despues la de este segundo producto por d, y así sucesivamente; en cuyo caso bien se dexa ver que el producto final deberá tener por factores á todos los números representados por las letras a, b, c, d &c. (*Aritm.* §. 22); y con arreglo al convenio adoptado para indicar la multiplicacion *se representará el producto de qualesquiera factores, escribiéndolos todos á continuacion unos de otros sin interposicion de signo alguno.* Así que la combinacion $abcd$ representa el producto de los quatro números designados por las letras a, b, c, d.

tado, y en descifrar la serie de operaciones que cada una indica, porque la falta de expedicion en esta especie de traducciones es uno de los obstáculos que mas retardan sus progresos en el estudio del Algebra.

Ya hemos hecho algun uso de esta regla, comprehendiendo en ella hasta los coeficientes numéricos, que son evidentemente factores de las cantidades, en cuya expresion entran. En efecto, indicándonos la expresion $15abcd$ que la cantidad representada por $abcd$ está tomada 15 veces, viene en suma á designar el producto de los cinco factores 15, a, b, c, d.

22 A conseqüencia del mismo convenio indicarémos la multiplicacion de quantos monomios se quiera, tales como $4abc$, $5def$, $3mn$, *formando de todos ellos un solo monomio ó una combinacion, en la qual se hallen todos los factores á continuacion unos de otros sin interposicion de signo alguno.* Así que la combinacion

$$4abc5def3mn$$

representará el producto de los tres monomios propuestos; pero como, segun hemos demostrado en la Aritmética (§. 84), podamos colocar en el órden que mas nos acomode los factores de un mismo producto, pondremos, usando de esta facultad, todos los factores numéricos al principio de la combinacion total; bien que entonces será necesario por la razon expuesta (§. 7) hacer uso de alguno de los signos de la multiplicacion, ó si pareciere mas conveniente, se efectuará la de todos los coeficientes. Así á la expresion anterior se le podrá dar esta forma: $4 \times 5 \times 3abcdefmn$;
ó estotra: $4 \cdot 5 \cdot 3abcdefmn$;
ó finalmente, efectuando la multiplicacion de los tres números 4, 5 y 3, estotra:

$$60abcdefmn.$$ [1]

[1] Con el auxîlio de los símbolos algebráicos se puede hacer mas perceptible la demostracion que hemos dado (*Aritm.* §. 84). En

23 Quando varios factores de un mismo producto estan designados por una misma letra, se simplifica mucho la expresion escribiendo la letra una sola vez, é *indicando por medio de un número quántas veces debe aquella letra ser factor de aquel producto;* y como el número que para esto empleemos haya de indicar varias multiplicaciones sucesivas, será indispensable colocarlo de modo que no se le pueda confundir con el *coeficiente*, del qual hacemos uso para simplificar la expresion del resultado de varias adiciones. Por esta razon se ha determinado colocar aquel otro número á la derecha y un poco mas arriba de la letra á la qual pertenezca, en lugar de que el coeficiente se coloca siempre á la izquierda y en la misma línea horizontal.

Segun esto el producto de a por a, que estaria bien representado por aa, lo estará con mas sencillez por a^2; el producto de b por b por b, que estaría bien representado por bbb, lo estará con mas sencillez por b^3, y así de los demas. En la expresion a^2 el 2 nos indica que el número designado por la letra a es *dos* veces factor, y de consiguiente no deberemos confundir aquella expresion con $2a$, que es una abreviacion de $a+a$: en la expresion b^3 el 3 nos indica que el número designado por la letra b es *tres* veces factor, y de consiguiente no deberemos confundir aquella expresion con $3b$, que

efecto, el producto $abcdefmn$ equivale á $ab \times cd \times ef \times mn$; y pudiéndose invertir el órden de los dos factores de un producto sin que este varie (*Aritm.* §. 27), equivaldrá tambien á $ba \times dc \times fe \times nm$, ó lo que es lo mismo, á $badcfenm$. Descomponiendo el producto primitivo de otros varios modos como $a \times bc \times de \times fm \times n$, podremos hacer que los factores vengan á estar colocados en el órden que mas nos acomode.

es una abreviacion de $b+b+b$. Para hacer todavía mas palpable el error que cometeríamos confundiendo estas expresiones, supongámos que a represente al número 5, en cuyo caso la expresion a^2 representará á 5×5, que equivale á 25; en vez de que la expresion $2a$ representará á $5+5$, ó á 2 veces 5, y en una palabra á 10. Si la letra b representare al número 8, la expresion b^3 representará á $8 \times 8 \times 8$, que equivale á 512, en lugar de que $3b$ representaria á $8+8+8$, ó á 3 veces 8, y en una palabra á 24.

La utilidad de la simplificacion que acabamos de indicar de las expresiones de los productos, se hace tanto mas perceptible quanto mayor es el número de factores designados con una misma letra. Si hubiéramos, por exemplo, de representar un producto en el qual la cantidad designada por a fuese factor *ocho* veces, la expresion $aaaaaaaa$ seria sumamente embarazosa, y por eso es justamente preferible la equivalente a^8.

24 Estos productos formados de factores todos iguales se llaman en general *potencias* del factor repetido; y segun lo esté dos, tres, quatro &c. veces, se llama el producto *segunda* ó *tercera* ó *quarta* &c. *potencia*. Así aa ó su equivalente a^2 se llama la *segunda potencia* de a; aaa ó su equivalente a^3 se llama la *tercera potencia* de a; $aaaa$ ó su equivalente a^4 se llama la *quarta potencia* de a, y así de las demas. [1]

[1] La segunda potencia de un número se llama tambien *el quadrado* de este número; y la tercera potencia se llama el *cubo* del mismo número: y aunque estas denominaciones pertenecientes á la Geometría, y que no guardan la uniformidad de la nomenclatura de las demas potencias, sean muy impropias en el Algebra, son las mas usadas, y por su brevedad merecen conservarse.

Por analogía se llama *primera potencia* de a la misma cantidad a, y por esta razon se puede considerar como equivalente á la expresion a^1. Lo mismo puede decirse de otra letra qualquiera.

A fin de poner mas en claro el uso que se hace de todas estas denominaciones las aplicaremos á un número determinado; y sea, por exemplo, 5.

Primera potencia de 5..... 5.
Segunda potencia........... $5\times5=25$.
Tercera potencia............ $5\times5\times5=25\times5=125$.
Quarta potencia............ $5\times5\times5\times5=125\times5=625$.
Quinta potencia......... $5\times5\times5\times5\times5=625\times5=3125$.
&c. &c. &c.

El número con que designamos quántas veces es factor una letra, ó lo que es lo mismo, qué potencia de la cantidad representada por la letra es el producto, se llama el *exponente* de ella. Haciendo pues uso de esta denominacion, diremos que *para formar una potencia de un número*, ó como tambien suele decirse, *para elevar un número á una potencia se debe multiplicar el número por sí mismo tantas veces menos una como unidades tenga el exponente de la potencia.*

25 Supuesto que el exponente indica quántas veces es factor de un producto la letra á la qual está sobrepuesto; y estando ya demostrado que el producto de dos cantidades qualesquiera debe contener todos los factores que entren en la composicion de estas cantidades, es consiguiente que si por exemplo hubiésemos de multiplicar la cantidad a^5, en la qual es cinco veces factor la a, por la cantidad a^3, en la qual es tres veces factor la misma a, en el producto deberá ser ocho veces factor la a, y de consiguiente lo deberémos representar

por a^8. Y siendo fácil generalizar este razonamiento, estableceremos por regla general que *el producto de dos potencias de un mismo número es otra potencia del mismo número, la qual tiene por exponente la suma de los dos exponentes del multiplicando y multiplicador.*

26 De esto se sigue que *quando hayamos de multiplicar dos monomios que tengan varias letras comunes, podremos simplificar la expresion del producto escribiendo en él una sola vez cada una de aquellas letras comunes con un exponente igual á la suma de los exponentes que tenga en el multiplicando y en el multiplicador.* Si, por exemplo, hemos de multiplicar a^2b^3c por $a^4b^5c^2d$, el producto, que puede representarse por $a^2b^3ca^4b^5c^2d$, ó variando la colocacion de los factores, por $a^2a^4b^3b^5cc^2d$, estará representado con mayor sencillez por $a^6b^8c^3d$, poniendo a^6 en lugar de a^2a^4; b^8 en lugar de b^3b^5; y c^3 en lugar de cc^2, ó lo que es lo mismo, de c^1c^2.

27 Así como distinguimos las potencias por el número de factores iguales que entran en la composicion de cada una, clasificamos todos los productos con arreglo al número de factores simples ó *primos* que los forman; y damos á estas diferentes clases la denominacion comun de *grados.* [1] Así decimos que el producto a^2b^3c, por exemplo, es del sexto grado, porque está formado de seis factores simples, á saber, dos factores a, tres

1 Siguiendo la analogía indicada en la nota del §. 24 suelen llamarse *dimensiones* los factores simples ó *primos* de qualquier producto; de modo que segun el ordinario modo de hablar el producto a^2b^3c tiene seis *dimensiones*; pero este solo exemplo basta para hacer ver lo absurda que es esta nomenclatura. Es verdad que los productos de dos factores representan las *areas*, que tienen dos dimensiones; y los productos de tres factores representan los *volúmenes*,

factores b, y un factor c; debiéndose tener entendido que aunque estos factores se llamen *primos* ó *primeros* porque no podemos descomponerlos en otros mas sencillos, pueden muy bien representar números compuestos; pero si atendemos al número particular que en un cierto y determinado caso representan, salen ya del estado de absoluta indeterminacion en que el Algebra los considera.

Tambien debe tenerse presente que para la determinacion del *grado* de un producto no entran en cuenta los coeficientes numéricos sino sólo los factores algebráicos ó literales.

Segun esto, y en conseqüencia de lo demostrado (§§. 21 y 25), quando se multiplique un monomio por otro, el número que indique el grado del producto deberá ser la suma de los que indiquen los grados del multiplicando y multiplicador.

28 Del mismo modo y por la misma razon que en la Aritmética efectuamos la multiplicacion de los números que se representan por muchas cifras, multiplicando todas las partes del *multiplicando* por cada una de las partes del *multiplicador*, y sumando los productos parciales (*Aritm.* §. 33): igualmente en el Algebra se executa la multiplicacion de las cantidades complexas ó de los polinomios, multiplicando sucesivamente todas las partes ó términos ó monomios del multiplicando por cada una de las partes, términos ó monomios del multiplicador, y reuniendo por último los productos parciales

que tienen tres dimensiones; pero pasado este término dexa de subsistir la correspondencia entre las expresiones algebráicas y las figuras geométricas, puesto que en la extension no pueden considerarse mas de tres dimensiones.

para tener en el conjunto de estos el producto total; pero en los polinomios algebráicos ocurre una particularidad que no se halla en las combinaciones de guarismos. Los polinomios tienen por lo comun términos sustractivos, en vez de que todos los guarismos que entran en una combinacion representan siempre partes aditivas. Las unidades, decenas, centenas &c. que entran en la formacion de un número, son otros tantos términos que en todos casos se consideran sumados unos con otros; y de ahí es que en la multiplicacion aritmética el producto total debe en todos casos ser la suma de todos los parciales, en vez de que en la algebráica no lo será sino quando sean aditivos todos los términos de los factores.

Tratemos de multiplicar $a+b$

por c.

y el producto.................... $ac+bc$

se obtendrá multiplicando cada una de las partes del multiplicando por el monomio multiplicador, y sumando los productos parciales ac y bc. Lo mismo executaríamos si el multiplicando tuviese tres ó mas términos todos aditivos.

Quando el multiplicador sea tambien la suma de varios términos, habremos de multiplicar sucesivamente todas las partes ó términos del multiplicando por cada una de las partes ó términos del multiplicador; y sumando por último todos los productos parciales, tendremos el producto total.

Conviene advertir que en estas multiplicaciones parciales no hay necesidad de guardar mas órden que el conducente á que no se omita ninguna de ellas.

Propongámonos multiplicar $a+b$
por $c+d$

Productos parciales... $\begin{cases} ac+bc \\ ad+bd \end{cases}$

Producto total... $ac+bc+ad+bd$.

Porque la multiplicacion de todo el multiplicando $a+b$ por la parte c del multiplicador produce $ac+bc$; y la multiplicacion de todo el multiplicando $a+b$ por la otra parte d del multiplicador produce $ad+bd$; y la suma de los dos resultados parciales es $ac+bc+ad+bd$, y de consiguiente esta es la expresion del producto total.

29 Si el multiplicando tuviese algunas partes sustractivas, los productos de estas partes deberán restarse de los de las demas, ó lo que equivale á lo mismo, se les deberá anteponer el signo — para indicar aquella sustraccion. Si por exemplo nos proponemos multiplicar $a-b$ por c, el producto será $ac-bc$, segun hemos hecho ver en la solucion del segundo problema que propusimos en el §. 14.

Si en el multiplicando hubiere varios términos sustractivos, y el multiplicador fuere un polinomio cuyos términos sean todos aditivos, tendrá lugar la misma regla. Propongámonos por exemplo multiplicar
$a-b-c$
por $d+f$

Productos parciales... $\begin{cases} ad-bd-cd \\ af-bf-cf \end{cases}$

Producto total..... $ad-bd-cd+af-bf-cf$

Porque la multiplicacion de todas las partes del multiplicando por la parte d del multiplicador produce $ad-bd-cd$; y la multiplicacion de todo el multiplicando por la otra parte f del multiplicador produce $af-bf-cf$; y sumando los dos productos parciales resultará la expresion que hemos hallado del producto total. Y pudiéndose aplicar los razonamientos que nos han dirigido en estas operaciones á quantos exemplos se propongan semejantes á los anteriores, podremos establecer por regla general que *mientras sean aditivos todos los términos del multiplicador, cada una de las partes ó términos del producto tendrá el mismo signo que el término ó parte correspondiente del multiplicando.*

30 Supongamos ahora que el multiplicador tenga términos sustractivos, siendo *aditivos* todos los del multiplicando; y aunque tratándose, como aquí se trata, de número abstractos, pudiéramos tomar por *multiplicando* al multiplicador, y hallar por las reglas establecidas el producto, propongámonos determinarlo sin necesidad de hacer aquella inversion. Hayamos por exemplo de multiplicar.................................. a

por $b-c$.

Producto......... $ab-ac$

Puesto que el multiplicador no es b ni c, ni la suma de estos dos números, sino el residuo que quede en quitando c de b, el verdadero producto no deberá ser ab, ni ac, ni $ab+ac$ sino $ab-ac$, es decir, el multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en b, *menos* el mismo multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en c; de cuya sustraccion debe resultar el

multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en $b-c$, y de consiguiente el producto que buscábamos.

Lo mismo se executará quando el multiplicando tenga dos ó mas términos todos aditivos: *se multiplicarán sucesivamente todas las partes del multiplicando por cada una de las del multiplicador, y del conjunto de los productos parciales procedentes de los términos aditivos de este se restarán todos los productos parciales procedentes de los términos sustractivos del mismo multiplicador.* Propongámonos por exemplo multiplicar el trinomio $a+b+c$ por el trinomio $d+e-f$, y el producto será

$$ad+bd+cd+ae+be+ce-af-bf-cf.$$

Supongamos por último que tanto el multiplicando como el multiplicador tengan términos sustractivos, proponiéndonos por exemplo multiplicar $a-b$

por $c-d$.

y el producto será... $ac-bc-ad+bd;$

porque todo el multiplicando $a-b$ se ha de multiplicar primeramente por la parte c del multiplicador; despues se debe multiplicar todo el multiplicando por la otra parte d del multiplicador; y siendo sustractiva esta segunda parte, deberémos restar del primer producto parcial el segundo. Ahora bien, el primer producto parcial es $ac-bc$; el segundo es $ad-bd$; y cambiando los signos de este para representar el residuo (§. 20) resultará el producto que buscábamos, qual lo hemos representado.

31 Resumiendo todas las conseqüencias que se pue-

den deducir de los exemplos anteriores, podremos establecer que generalmente *la multiplicacion de los polinomios se efectua, en quanto es posible, multiplicando sucesivamente con arreglo á los preceptos dados para los monomios* (§§. 21 *y sig.*) *todas las partes ó términos del multiplicando por cada una de las partes ó términos del multiplicador; y teniendo presente que todo producto parcial monomio procedente de un término aditivo del multiplicador debe tener el mismo signo que el multiplicando parcial que haya concurrido á su formacion; y todo producto parcial monomio procedente de un término sustractivo del multiplicador debe tener un signo contrario al que tenga el multiplicando parcial que haya concurrido á su formacion.*

Si particularizamos los diferentes casos comprehendidos en esta regla general, deducirémos por conclusion que

1.° *Todo término aditivo multiplicado por otro término aditivo da un producto aditivo.*

2.° *Todo término sustractivo multiplicado por un término aditivo da un producto sustractivo.*

3.° *Todo término aditivo multiplicado por un término sustractivo da un producto sustractivo.*

4.° *Todo término sustractivo multiplicado por otro término sustractivo da un producto aditivo.*

Esto mismo se puede expresar mas brevemente diciendo que *si los dos factores parciales tuvieren un mismo signo, el producto parcial procedente de ellos será aditivo, ó tendrá el signo +; pero si los dos factores parciales tuvieren diferentes signos, el producto parcial será sustractivo, y de consiguiente tendrá el signo —.*

A fin de facilitar la práctica de la multiplicacion de

los polinomios, recapitularémos todas las reglas que es necesario observar en esta operacion.

1.º *Se determinará el signo que se ha de anteponer á cada término del producto total*, ó lo que es lo mismo, *á cada producto parcial monomio, con arreglo á los preceptos que acabamos de prescribir*. Esta se llama la regla de los signos.

2.º *El coeficiente de cada producto parcial monomio ha de ser el producto de los coeficientes de los dos factores parciales que concurran á su formacion* (§. 22). Esta se llama la regla de los coeficientes.

3.º *Cada producto parcial monomio ha de contener á continuacion unas de otras todas las diferentes letras que se hallen en los dos factores parciales* (§. 21). Esta se llama la regla de las letras.

4.º *Cada una de las letras comunes á los dos factores monomios tendrá en el producto parcial procedente de ellos un exponente igual á la suma de los exponentes que la misma letra tenga en los dos factores* (§. 25). Esta se llama la regla de los exponentes.

32 Hagamos aplicacion de todas estas reglas al exemplo siguiente:

Multiplicando........ $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

Multiplicador........ $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

Productos parciales. $\begin{cases} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{cases}$

Producto total reducido............ $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

En la primera línea horizontal de los productos parciales se hallan todos los que han resultado de la multi-

plicacion de los tres términos del multiplicando por el primer término a^3 del multiplicador; y como este término no tiene antepuesto signo alguno y de consiguiente es aditivo, todos los productos parciales monomios á cuya formacion concurra deberán tener los mismos signos que los términos correspondientes del multiplicando (§. 31). En este supuesto el primer producto parcial $5a^7$ no tiene signo, ó lo que es lo mismo, es aditivo, porque lo es el primer término $5a^4$ del multiplicando; el coeficiente del mismo producto parcial es 5, porque siendo 5 el coeficiente del primer término del multiplicando, y 1 el del primer término del multiplicador, el producto de los dos coeficientes es 5. Los factores parciales $5a^4$ y a^3 no tienen mas letra que la a con el exponente 4 en el multiplicando, y con el exponente 3 en el multiplicador; y por esa razon en el producto parcial $5a^7$ no hay mas letra que la a con el exponente 7, suma de aquellos otros dos.

El segundo término del multiplicando es sustractivo, y de consiguiente al combinarse con el primer término del multiplicador debe dar un producto sustractivo ó con el signo —. El coeficiente 2 del uno multiplicado por el coeficiente 1 del otro, da 2 para coeficiente del producto á cuya formacion concurren. En los dos factores parciales no hay mas letras que la a y la b; y de consiguiente el producto debe contener estas letras y ninguna otra. La letra a es comun á los dos factores, y así en uno como en otro tiene por exponente al 3, y de consiguiente la misma letra tendrá en el producto el exponente 6, que equivale á $3+3$. Así que el segundo producto parcial monomio con su signo será $-2a^6b$.

Como el tercer término $4a^2b^2$ del multiplicando es aditivo, lo es tambien el producto parcial que resulta de su multiplicacion por el primer término del multiplicador; el coeficiente deberá ser 4; las letras deberán ser la *a* y la *b*, la primera con el exponente 5, y la segunda con el mismo exponente 2 que tiene en el multiplicando. Así se formará el tercer producto parcial $+4a^5b^2$.

La segunda línea de productos parciales contiene todos los que han resultado de todos los términos del multiplicando por el segundo término del multiplicador; y por ser sustractivo este término todos los productos parciales de esta línea tienen signo contrario al de los términos del multiplicando que han concurrido á su formacion. Para los coeficientes, las letras y los exponentes se han seguido las mismas reglas que en la formacion de los productos parciales de la línea anterior.

En la tercera y última estan los productos parciales procedentes de la multiplicacion de todos los términos del multiplicando por el tercer término del multiplicador; y como es aditivo este término, todos los productos parciales á cuya formacion concurre conservan el mismo signo que los términos correspondientes del multiplicando.

Teniendo ya formados todos los productos parciales, de cuya reunion se compone el total, se les exâmina atentamente para ver si entre ellos hay algunos términos semejantes, y en caso que los haya se les reduce observando para ello la regla del §. 19, y teniendo presente que *para ser semejantes dos ó mas términos no basta que tengan unas mismas letras, sino que ademas cada una de estas ha de tener en todos un mis-*

mo exponente, sin lo qual no se hallará en ellos la misma combinacion de factores simples ó *primos*, como se requiere para la semejanza de los términos y poder reducirlos. En nuestro exemplo hemos efectuado tres reducciones, á saber:

la de $-2a^6b$ y $-20a^6b$, que equivalen á $-22a^6b$;
la de $+4a^5b^2$ y $+8a^5b^2$, que equivalen á $+12a^5b^2$;
la de $-16a^4b^3$ y $+10a^4b^3$, que equivalen á $-6a^4b^3$.

Despues de efectuadas estas tres reducciones ha resultado el producto total simplificado, qual se halla en la última línea del exemplo.

Para exercicio de los principiantes pondremos aquí otro, algo mas complicado, cuya inteligencia no puede ya serles dificil. En el resultado final de la operacion podrán fácilmente notar que no es posible reducir mas términos que

$$-165a^5b^3c \text{ y } +25a^5b^3c;$$

porque siendo estos los únicos en cuya composicion entran unas mismas letras con unos mismos exponentes, son los únicos términos semejantes que se hallan en todo el producto, y de consiguiente los únicos susceptibles de reduccion.

Multiplicando. $5a^4b^2+7a^3b^3-15a^5c+23b^2d^4-17bc^3d^2-9abcdm^2$

Multiplicador. $11b^3-8c^3+5abc-2bdm$

Productos parciales.
$$\begin{cases} 55a^4b^5+77a^3b^6-165a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2 \\ -40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3+120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2 \\ +25a^5b^3c+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2 \\ -10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3 \end{cases}$$

Resultado simplificado....
$$\begin{cases} 55a^4b^5+77a^3b^6-140a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2-40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3 \\ +120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4 \\ -85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2-10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m \\ +18ab^2cd^2m^3 \end{cases}$$

33 A conseqüencia de lo que debemos practicar en la multiplicacion de los polinomios, es fácil ver que si todos los términos del multiplicando fueren de un mismo grado, sea qual fuese; y todos los términos del multiplicador fueren tambien de un mismo grado, qualquiera que sea; todos los términos del producto serán asimismo del grado indicado por la suma de los números que indiquen los grados de los dos factores.

En el último exemplo, en el qual el multiplicando es del sexto grado, y el multiplicador del tercero, el producto es del noveno; y en el exemplo anterior, en el qual el multiplicando es del quarto grado, y el multiplicador del tercero, el producto es del séptimo; y así de los demas.

Los polinomios, cuyos términos son todos de un mismo grado, sea qual fuere, se llaman *homogéneos*. Diremos, pues, que en siendo homogéneos dos ó mas factores complexos ó polinomios, debe tambien ser *homogéneo* el producto; y esta observacion podrá sernos muy útil para precaver ó corregir muchas equivocaciones que estamos expuestos á padecer en las multiplicaciones parciales, omitiendo por olvido algunos factores, ó poniendo algunos exponentes mayores ó menores de lo que debieran ser.

34 Por la razon que expusimos (§. 3), los resultados de las operaciones algebráicas efectuadas con cantidades literales nos dan á conocer el influxo que en ellos tiene cada una de las partes de estas cantidades, ó lo que es equivalente, cómo y quánto ha contribuido cada parte para la formacion de los mismos resultados; y por este medio nos conducen á descubrir en los números muchas propiedades generales é independientes de todo

sistema de numeracion. Los tres exemplos siguientes de multiplicaciones algebráicas nos manifiestan ciertas propiedades de esta clase, muy importantes por razon del freqüente uso que de ellas haremos en lo sucesivo.

I.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-b^2 \\ \hline \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ \hline \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \times\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

La primera multiplicacion, en la qual el binomio $a+b$ multiplicado por el binomio $a-b$ ha producido a^2-b^2, nos hace ver que *si se multiplica la suma de dos números qualesquiera por la diferencia de los mismos números, el producto será la diferencia de los quadrados de estos números.*

De esta propiedad podemos hacer uso para abreviar muchas multiplicaciones aritméticas; pues aunque las combinaciones de guarismos no contengan parte alguna sustractiva, ocurre no pocas veces tener que multiplicar dos números, en los quales se echa prontamente de ver que son respectivamente la suma y la diferencia de otros dos que podemos multiplicar por sí mismos

con suma facilidad, y aun sin necesidad de tomar la pluma para ello. Tengamos, por exemplo, que multiplicar 52 por 48; y observando que el primero equivale á *cincuenta* mas *dos*, y el segundo á *cincuenta* menos *dos*, vendremos en conocimiento de que el producto será *el quadrado de* 50 menos *el quadrado de* 2. Ahora bien, el quadrado de 50, ó el producto de 50 por 50, es 2500; el quadrado de 2 es 4; y restando 4 de 2500, el residuo 2496 será el producto que buscábamos. Lo mismo puede executarse en la multiplicacion de 84 por 76, y en todas las demas en que los factores tengan la circunstancia de ser la *suma* y la *diferencia* de unos mismos números, cuyos quadrados se hallen con prontitud y facilidad.

En el segundo exemplo vemos que tanto el multiplicando como el multiplicador es un mismo binomio $a+b$; expresion algebráica, que traducida al idioma vulgar quiere decir: *una cantidad compuesta de dos partes qualesquiera sumadas*. El resultado pues de esta multiplicacion nos da á conocer que *la segunda potencia ó el quadrado de una cantidad compuesta de dos partes qualesquiera sumadas, se compone del quadrado de la primera parte; de dos veces el producto de la primera multiplicada por la segunda, y del quadrado de la segunda*. Esta es una mera traduccion de la expresion algebráica $a^2+2ab+b^2$.

Y como todo número representado por dos cifras se nos presente como compuesto de dos partes sumadas; siempre que hayamos de multiplicar por sí mismo qualquier número de esta clase, o lo que es lo mismo, siempre que nos propongamos *quadrarlo* ó elevarlo al quadrado ó á la segunda potencia, podremos hacer uso de

la regla que nos precribe el resultado algebráico de la segunda multiplicacion.

En la tercera el multiplicando es el quadrado del binomio $a+b$; y siendo este mismo binomio el multiplicador, el resultado viene á ser el cubo del mismo binomio; y traducido al idioma vulgar nos hace ver que *el cubo de qualquier cantidad compuesta de qualesquiera dos partes sumadas se compone del cubo de la primera parte; de tres veces el quadrado de la primera multiplicado por la segunda; de tres veces la primera multiplicada por el quadrado de la segunda, y del cubo de la segunda.* Ya se nos ofrecerán freqüentes ocasiones de hacer uso de todas estas propiedades.

35 En muchos casos, y señaladamente quando despues que hayamos executado una operacion tengamos que executar la inversa, con la qual puede deshacerse en todo ó en parte lo que con la primera hayamos hecho, conviene no efectuar la primera sino solo indicarla; y de ahí es que generalmente las operaciones algebráicas no se efectúan del modo que esto es posible, sino quando es absolutamente indispensable; y de consiguiente será preciso valerse del medio que hemos adoptado (§. 11) para indicar la multiplicacion de las cantidades complexas.

La expresion, por exemplo,

$$(5a^4-3a^2b^2+b^4)(4ab^2-ac^2+d^3)(b^2-c^2)$$

indica que se debe multiplicar el trinomio encerrado dentro del primer paréntesis por el trinomio encerrado dentro del segundo, y que el producto de esta primera multiplicacion se debe multiplicar por el binomio encerrado dentro del tercero; y de consiguiente representa el resultado final de estas multiplicaciones.

Algunos autores, para indicar estas multiplicaciones de cantidades complexas ó polinomias, en vez de encerrar dentro de paréntesis los factores, han tirado por cima de cada uno de estos una línea horizontal, y han puesto el signo de la multiplicacion entre ellos. Si hubiésemos de seguir esta práctica, daríamos á la expresion anterior esta forma:

$$\overline{5a^4 - 3a^2b^2 + b^4} \times \overline{4ab^2 - ac^2 + d^3} \times \overline{b^2 - c^2};$$

pero como las líneas, si estan mas ó menos prolongadas de lo que deben, pueden inducir á muchas equivocaciones, son preferibles los paréntesis, los quales no pueden jamas dexar duda sobre el número de términos que comprehende cada factor.

De la division de las cantidades algebráicas.

36 La division algebráica, así como la numérica, debe considerarse como una operacion cuyo objeto es *hallar uno de los factores de un producto dado, quando se conoce el otro factor;* por manera que el divisor multiplicado por el quociente debe reproducir al dividendo.

Aplicando estas nociones en primer lugar á las cantidades monomias, deberémos inferir (§. 21) que en la composicion del dividendo deben entrar todos los factores del divisor y del quociente, y que por tanto *si se suprimen en el dividendo todos los factores del divisor*, en caso que los contenga, como se requiere para poder efectuar la division, *lo que despues de aquella supresion resulte, será el quociente que se busca.*

Propongámonos, por exemplo, dividir el monomio $72a^5b^3c^2d$ por el monomio $9a^3bc^2$; y segun la regla que acabamos de establecer, deberémos suprimir en el pri-

mero los factores $9, a^3, b$ y c^2 del segundo; y de consiguiente para que la division pueda efectuarse, es necesario que todos estos factores esten contenidos en el dividendo. Esto quiere decir que el coeficiente 9 debe ser factor del coeficiente 72, ó lo que es lo mismo, que 72 debe ser exâctamente divisible por 9; y como esto se verifica, puesto que $72 = 9 \times 8$; suprimiendo el factor 9, resultará el otro factor 8 por coeficiente del quociente.

Tambien se sigue de las reglas de la multiplicacion (§. 25) que el exponente 5 que la letra *a* tiene en el dividendo, debe ser la suma de los exponentes que la misma letra tenga en el divisor y en el quociente. Será pues el exponente que aquella letra debe tener en el quociente la diferencia de los exponentes que tenga en el dividendo y en el divisor, esto es, $5 - 3 = 2$. Así que la letra *a* tendrá en el quociente el exponente 2. Por la misma razon la letra *b* deberá tener en el quociente el exponente $2 = 3 - 1$. Finalmente siendo comun al dividendo y al divisor el factor c^2, no deberá aparecer la letra *c* en el quociente; pero en cambio deberá permanecer el factor *d* segun se halla en el dividendo, por no hallarse esta letra en el divisor. De este modo resultará que el quociente que buscamos es $8a^2b^2d$.

De este razonamiento, que se puede fácilmente aplicar á qualquiera otro exemplo, se deduce que generalmente *para efectuar la division de un monomio por otro, se debe*

1.º *Dividir el coeficiente del dividendo por el del divisor:*

2.º *Suprimir en el dividendo las letras que le sean comunes con el divisor quando en ambos tengan un mismo exponente; y quando el exponente que una letra tenga en*

el dividendo sea mayor que el exponente de la misma en el divisor, deberá aquella letra permanecer en el quociente con un exponente igual á la diferencia de los otros dos.

Por último, *todos los factores del dividendo que no se hallen en el divisor, se deben conservar en el quociente segun esten en aquel.*

37 Si quisiésemos generalizar la regla que acabamos de dar para determinar por medio de la sustraccion el exponente que cada letra comun al dividendo y al divisor debe tener en el quociente, y la aplicásemos al caso en que la letra comun tuviese un mismo exponente en ambos, vendria á resultar que el exponente de aquella letra en el quociente deberia ser *cero*, puesto que *cero* es la diferencia de dos qualesquiera cantidades iguales. Por manera que el quociente de la cantidad a^3 dividida por a^3 estaria bien representado por a^0; y como sea bien sabido que el quociente de qualquiera cantidad dividida por otra igual á ella es la unidad, es consiguiente que *la expresion* a^0 *sea un símbolo de la unidad*, y *que en su lugar podamos sustituir* 1 *siempre que nos acomode.* Si hubiéramos de dividir a^3bc^2 por a^2bc^2, el quociente estaria bien representado por $a^1b^0c^0$; y esta expresion será equivalente á a, que es el quociente que hubiera resultado suprimiendo los factores comunes al dividendo y divisor; porque equivaliendo b^0c^0 á $1 \times 1 = 1$, $a^1b^0c^0$ equivaldrá á $a \times 1 \times 1 = a$. Podremos pues suprimir en una combinacion de factores todas las letras cuyo exponente sea cero.

Por lo expuesto se ve que esta proposicion: *toda cantidad cuyo exponente sea cero, equivale á la unidad,* no es, propiamente hablando, sino la explicacion de un resultado, al qual nos conduce el convenio que hemos adoptado sobre el modo de representar las potencias de

una cantidad qualquiera, valiéndonos para ello de los exponentes.

38 Para que pueda efectuarse la division de un monomio por otro, es necesario, segun hemos visto, *que el divisor no tenga letra alguna que no se halle en el dividendo; que el exponente de cada una de las letras comunes no sea mayor en el divisor que el que la misma letra tenga en el dividendo; y que el coeficiente de este sea exâctamente divisible por el coeficiente del divisor.* Luego que falte alguna de estas tres condiciones, nos limitamos á indicar la division, y representamos el quociente formando una fraccion (§. 2), cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor. Lo único que despues de esto hacemos es *simplificar la fraccion*, suprimiendo en sus dos términos los factores que les sean comunes, si es que los hay; pues si bien se reflexîona, los principios fundamentales sobre que estriba toda la teórica de las fracciones aritméticas, son independientes de todo sistema de numeracion, y de consiguiente son aplicables igualmente á las algebráicas.

Quando pueda verificarse la *simplificacion, se suprimirán en primer lugar los factores numéricos que sean comunes á los coeficientes del dividendo y divisor; y despues las letras que tambien les sean comunes, quando tengan un mismo exponente en ambos términos; pero si fueren desiguales los dos exponentes de alguna letra comun, permanecerá esta letra en el término en que antes tenia el mayor exponente, con otro igual á la diferencia de los dos anteriores.* El exemplo siguiente aclarará lo prescrito en esta regla.

Propongámonos dividir el monomio $48a^3b^5c^2d$ por $64a^3b^3c^4e$; y como en primer lugar el coeficiente del

dividendo no es divisible por el del divisor; como en segundo la letra comun c tiene en el divisor un exponente mayor que en el dividendo; y por último, como este no contiene la letra e que se halla en el divisor; en una palabra, como faltan en este caso todas las condiciones indispensables para que pueda efectuarse la division de dos monomios algebráicos, habrémos forzosamente de contentarnos con una mera indicacion, y representarémos el quociente con esta fraccion ó quebrado:

$$\frac{48a^3b^5c^2d}{64a^3b^3c^4e}.$$

Tratando ahora de simplificar esta expresion, notarémos que los coeficientes 48 y 64 son ambos exâctamente divisibles por 16; y de consiguiente suprimiendo este factor comun, el coeficiente del numerador se reducirá á 3, y el del denominador quedará reducido á 4. La letra comun a tiene el mismo exponente en ambos términos de la fraccion, y de consiguiente se puede suprimir enteramente la cantidad representada por a^3. La letra comun b tiene en el numerador el exponente 5, y en el denominador el exponente 3; y siendo $b^5=b^3\times b^2$, despues de suprimir en ambos términos el factor comun b^3 deberá permanecer b^2 en el numerador. La letra comun c tiene en el denominador el exponente 4, y en el numerador el exponente 2; y siendo $c^4=c^2\times c^2$, en habiendo suprimido en ambos términos el factor comun c^2, permanecerá otro c^2 en el denominador. Se ve pues que en no siendo iguales los exponentes de una letra comun al dividendo y divisor, ó á los dos términos de la fraccion con que representamos el quociente, permanece despues de la simplificacion la misma letra en el término en que tenia el mayor exponente, con otro igual á

la diferencia de los dos anteriores. Por último, no siendo comunes las letras *d* y *e*, deberá permanecer cada una en el mismo término en que antes se hallaba.

Así habrémos reducido la fraccion propuesta á esta otra: . . . . $\frac{3b^2d}{4c^2e}$;

la qual será la expresion *algebráica* mas sencilla que puede darse del quociente que nos proponíamos hallar; sin que por esto deba entenderse que quando sustituyamos en lugar de las letras *b*, *d*, *c*, *e* los números que hayamos designado por ellas, no sea nuevamente reducible la fraccion á menores términos, si es que sus valores numéricos contienen algun divisor comun. Entonces dexa ya de ser algebráica la fraccion, y pasa á ser aritmética; dexa de ser indeterminado su valor, y pasa á ser determinado; y quando decimos que la fraccion $\frac{3b^2d}{4c^2e}$ es enteramente *irreducible*, la consideramos en el primer estado y no en el segundo.

39 Es muy digno de ser notado *que si todos los factores, sin exceptuar el coeficiente, del dividendo se hallasen en el divisor, y si ademas contuviese este algunos otros que le sean peculiares; en habiendo suprimido todos los factores comunes, deberémos poner la unidad por numerador de la fraccion reducida.* En efecto, suprimiendo así en el denominador como en el numerador todos los factores de este, se dividen los dos términos del quebrado por el mismo numerador; y ya se sabe que qualquiera cantidad dividida por otra igual, ó como se dice, por sí misma, da por quociente la unidad.

Sea, por exemplo, la fraccion $\frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd}$;

en la qual observamos que los factores 4, a^2, b y c se hallan en ambos términos. Si pues los suprimimos tanto en el numerador como en el denominador, dividimos así al uno como al otro por la cantidad $4a^2bc$. Ahora bien, esta cantidad dividida por sí misma da por quociente la unidad; y la cantidad $12a^2b^3cd$ dividida por $4a^2bc$, da por quociente $3b^2d$. Así que la fraccion reducida á su mas sencilla expresion será

$$\frac{1}{3b^2d}.$$

40 Supongamos ahora que hayamos de dividir por un monomio un polinomio cuyos términos sean todos aditivos; y cotejando este caso con el de la division aritmética, echarémos de ver que el mismo principio fundamental que nos dirigió en la una, debe igualmente dirigirnos en la otra; á saber, *si dividimos sucesivamente por el divisor todas las partes ó términos de que se compone el dividendo, el conjunto de todos los quocientes parciales será el quociente total.*

Propongámonos, por exemplo, dividir $18a^3b^2c^4 + 15a^4b^3c^2 + 12a^2b^4cd^2$ por $3a^2b^2c$; y dividiendo sucesivamente por el divisor (§. 36) los tres términos del dividendo, la suma de los tres quocientes parciales será el total que buscamos. Será pues $\frac{18a^3b^2c^4 + 15a^4b^3c^2 + 12a^2b^4cd^2}{3a^2b^2c}$ $= 6ac^3 + 5a^2bc + 4b^2d^2$.

Si alguna parte del polinomio dividendo fuere sustractiva, lo será tambien el quociente parcial procedente de ella; y aunque á primera vista parezca que en la Aritmética no ha ocurrido caso alguno análogo á este, si bien reflexîonamos la regla establecida para restar de un quebrado otro que tenga el mismo denominador,

verémos que estriba en el mismo principio que aquí nos dirige; á saber: *lo mismo es executar dos divisiones, en las quales haya el mismo divisor, y restar un quociente de otro, que restar un dividendo de otro, y dividir el residuo por el divisor comun.* Si pues nos proponemos dividir el polinomio $20a^4b^2c^3 - 12a^3b^5c + 16a^5bc^2d$ por $4a^3bc$ será $\frac{20a^4b^2c^3 - 12a^3b^5c + 16a^5bc^2d}{4a^3bc} = 5abc^2 - 3b^4 + 4a^2cd$.

41 Quando el dividendo y el divisor son polinomios, nos contentamos por lo comun con indicar la division, y representamos el quociente por una fraccion cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor; y como de las reglas de la multiplicacion se siga que quando se multiplica por un monomio un polimonio, aquel viene á ser factor comun de todos los términos del producto, que es otro polinomio, nos aprovechamos de esta observacion para simplificar aquella primera expresion del quociente siempre que todos los términos del numerador y denominador tengan algun factor comun.

Sea, por exemplo, la expresion

$$\frac{6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2}{9a^2b - 15a^2c + 24a^3};$$

y exâminando los términos del numerador verémos que todos los coeficientes son exâctamente divisibles por 3, y que á todos los términos es comun el factor a^2. Exâminando igualmente los términos del denominador, verémos que todos los coeficientes son exâctamente divisibles por 3, y que á todos los términos es comun el factor a^2. Serán pues exâctamente divisibles por $3a^2$ el numerador y el denominador de la fraccion propuesta; y

efectuando esta division de sus términos, quedará simplificada y reducida á estotra:

$$\frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}.$$

Si todos los factores sin exceptuar el coeficiente de alguno de los términos del numerador ó del denominador fueren comunes á todos los demas; al tiempo de efectuar la simplificacion pondremos en aquel término la unidad.

Sea por exemplo la expresion

$$\frac{24a^3b^3c^2d - 18a^4b^2cm^2 + 12a^2b^5cn}{30a^5b^2c + 42a^3b^2cf - 6a^2b^2c};$$

y viendo en ella que todos los factores del último término del divisor ó denominador son comunes á todos los demas términos así del numerador como del mismo denominador, suprimirémos en todos ellos los factores comunes, ó lo que es lo mismo, dividirémos por $6a^2b^2c$ el numerador y el denominador de la fraccion propuesta, y por este medio la transformarémos en estotra enteramente irreducible:

$$\frac{4abcd - 3a^2m^2 + 2b^3n}{5a^3 + 7af - 1}.$$

42 Si nos propusiéramos dividir el polinomio $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ por el trinomio $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$, podríamos ciertamente contentarnos con indicar la division y representar el quociente por medio de esta fraccion:

$$\frac{5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5}{5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2};$$

y observando que todas las partes del numerador y del denominador son exâctamente divisibles por a^2, podríamos transformar aquella primera expresion en estotra:

$$\frac{5a^5 - 22a^4b + 12a^3b^2 - 6a^2b^3 - 4ab^4 + 8b^5}{5a^2 - 2ab + 4b^2}.$$

Mas como veamos que en los términos del dividendo, aun despues de reducidos, se hallan las mismas letras que en los del divisor, podremos sospechar que el dividendo puede haber resultado de alguna multiplicacion efectuada con el divisor y algun otro polinomio que no conocemos. Y puesto que el divisor multiplicado por el quociente debe reproducir al dividendo, es necesario que este último contenga todos los productos parciales de cada término del divisor multiplicado por cada término del quociente; por manera que si eligiendo qualquiera de los términos del divisor, pudiésemos á primera vista determinar en el dividendo quáles son los productos parciales á cuya formacion concurrió aquel término elegido, en dividiendo sucesivamente por este todos aquellos productos parciales, tendríamos todas las partes de que debiera formarse el quociente; del mismo modo que en la Aritmética veníamos en conocimiento de las diversas partes del quociente, dividiendo sucesivamente ciertas partes del dividendo por la primera parte del divisor. Pero en los números representados por guarismos no cabe duda alguna sobre el lugar que en el dividendo total debe ocupar cada uno de los productos parciales á cuya formacion ha concurrido la primera parte del divisor; pues con arreglo á ley establecida en la numeracion cada uno de aquellos productos parciales debe estar en la primera parte, comenzando á contar por la izquierda, de cada dividendo parcial. En el Algebra por el contrario puede cada producto parcial estar en el lugar que se quiera, sin que por eso se altere su valor; y de ahí procede la dificultad de determinar

en el dividendo quáles son los productos parciales á cuya formacion ha concurrido un término elegido en el divisor.

Para superar esta dificultad reflexîonarémos de nuevo sobre lo que hemos executado en la multiplicacion de los polinomios; debiendo estar bien persuadidos de que nada puede manifestarnos con tanta claridad el camino que debemos seguir en la execucion de todas las operaciones cuyo objeto sea descomponer las cantidades, como la observacion del que en las operaciones inversas hemos seguido para componerlas. Con el fin de que esta observacion produzca en este caso todo el efecto que deseamos, hemos propuesto como dividendo y divisor el producto y el multiplicando de la primera multiplicacion efectuada en el §. 32.

En primer lugar en el trinomio $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$, que allí fue multiplicando y aquí va á ser divisor, notarémos que en el primer término tiene la letra a el exponente 4; en el segundo el exponente 3, y en el tercero el exponente 2; y sepamos que esta circunstancia se expresa diciendo que *los términos de aquel trinomio*, que pudieran estar colocados con qualquier órden, *estan ordenados con respecto á la letra* a. Notemos en segundo lugar que el trinomio $a^3-4a^2b+2b^3$, que allí fue multiplicador y aquí debe ser el quociente que buscamos, está igualmente *ordenado con respecto á la misma letra* a; porque esta letra tiene en el primer término el exponente 3; en el segundo el exponente 2; y no se halla en el último, lo qual equivale á decir que en este tiene el exponente *cero* (§. 37).

En vista de este órden que se observa en los términos de los dos factores, es fácil inferir que si el pro-

ducto está ordenado con respecto á la misma letra, en el primer término deberá esta tener el exponente 7, que es la suma de los dos exponentes mas elevados que tiene en los dos factores. Y por la inversa, estando, como se supone, ordenado con respecto á la letra *a* el divisor; si lo está con respecto á la misma letra el dividendo, el primer término de este deberá ser el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el primer término del quociente. He aquí pues el medio que se ha descubierto de superar la dificultad que para efectuar en los casos que es posible la division algebráica, ofrece la absoluta libertad que tenemos de colocar las varias partes ó términos de un polinomio con el órden que se nos antoje ó que mas nos acomode.

En uso de esta misma facultad ordenamos con respecto á una misma letra los términos del dividendo y los del divisor, segun lo estan ya con respecto á la *a* los términos de los dos polinomios propuestos al principio de este párrafo. Luego que esten así *ordenados* los términos, debemos tener certeza de que, sea qual fuere el quociente total, el primer término $5a^7$ del dividendo es el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el primer término del quociente ordenado con respecto á la misma letra *a*. Dividiendo pues el monomio $5a^7$ por el monomio $5a^4$, el quociente a^3 será el primer término del factor desconocido que buscamos, ó lo que es lo mismo, del quociente total. Y como segun las reglas de la multiplicacion el producto total deba contener todos los productos parciales procedentes de todas las partes del multiplicando multiplicadas por cada una de las del multiplicador, es consiguiente que en el dividendo propuesto deban hallarse todos

los productos de las tres partes del divisor multiplicadas por el primer término a^3 del quociente. Si pues restamos del dividendo el conjunto de estos productos parciales, que es $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$, el residuo $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$, no contendrá ya mas productos que los procedentes de la multiplicacion del divisor por el segundo, por el tercero &c. términos del quociente.

El residuo que ha resultado se debe considerar como un nuevo dividendo, y de consiguiente debe tener lugar en él la misma observacion que hicimos con respecto al dividendo primitivo; á saber: que su primer término, en el qual tiene la a el mayor exponente, debe ser el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el segundo del quociente. Mirando pues como un producto parcial al término $20a^6b$, y observando que tiene antepuesto un signo contrario al del término del multiplicando que ha concurrido á su formacion, deberemos inferir (§. 31) que ha de ser sustractivo ó tener el signo $-$ el término correspondiente del multiplicador, ó lo que es lo mismo, del quociente que buscamos. Dividiendo el monomio $-20a^6b$ por el monomio $5a^4$, resultará $-4ab^2$ por quociente parcial, y este será el segundo término del total. Si multiplicamos por este nuevo término todo el divisor, y restamos del dividendo el producto, en el residuo $10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ no se hallarán ya mas productos parciales que los procedentes de la multiplicacion del divisor por el tercero, quarto &c. términos del quociente.

Considerando como un nuevo dividendo al residuo que acabamos de hallar, su primer término $10a^4b^3$, en el qual la letra a tiene el mayor exponente, deberá ser

el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el tercero del quociente. Dividiendo pues $10a^4b^3$ por $5a^4$, resultará $2b^3$; y multiplicando por este término todo el divisor, y restando del último dividendo parcial el producto, verémos que no resulta residuo alguno; lo qual nos hace ver que el quociente total está ya completo, y que de consiguiente no tiene mas de los tres términos que hemos hallado.

Si hubiese de tener mas términos, los hallaríamos del mismo modo que los anteriores; y si, como se supone, fuese factor del dividendo el divisor, quando llegásemos á restar del último dividendo parcial el producto del divisor por el último término del quociente, no deberia resultar residuo alguno, ó lo que es lo mismo, deberia quedar enteramente exhausto el dividendo total.

43 Pudiéndose fácilmente aplicar á qualquiera otro caso el razonamiento que hemos hecho en el exemplo propuesto, se ha formado la siguiente

Regla general: *Para efectuar, en los casos que sea posible, la division algebráica de los polinomios, se colocan el dividendo y el divisor en la misma disposicion que en la division aritmética, y con la advertencia de que los términos de ambos esten ordenados con respecto á una misma letra; es decir: de modo que los exponentes de esta letra desde el primer término hasta el último vayan constantemente en disminucion.*

Se dividirá el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y se escribirá el resultado de esta division en el lugar generalmente asignado al quociente.

Se multiplicará todo el divisor por el quociente par-

cial que se acaba de hallar; se restará del dividendo este producto, y se reducirán los términos semejantes que entonces haya.

Se considerará el residuo como un nuevo dividendo; y de consiguiente se dividirá su primer término por el primer término del divisor; el resultado de esta division será la segunda parte del quociente; se multiplicará por esta segunda parte ó término todo el divisor; se restará del dividendo el producto, reduciendo los términos semejantes; y el residuo vendrá á ser otro nuevo dividendo, con el qual se executará la misma serie de operaciones que con los anteriores.

Del mismo modo se continuará hasta que venga á resultar cero por último residuo, ó lo que es lo mismo, hasta que esten enteramente apurados todos los términos del dividendo.

Teniendo presente que en siendo un monomio aditivo el multiplicador, cada producto parcial tiene el mismo signo que el término correspondiente del multiplicando (§. 31); y que en siendo sustractivo el multiplicador, el producto debe tener un signo contrario al del multiplicando; es fácil inferir que *quando el primer término del dividendo y el primer término del divisor tengan un mismo signo, el quociente deberá tener el signo +; pero si tuvieren signos contrarios, el quociente deberá tener el signo —*. Esta es la regla de los signos.

Todas las divisiones parciales se executan conforme á las reglas establecidas para los monomios; es decir:

Se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor; y he aquí la que se llama regla de los coeficientes.

Las letras que sean comunes al dividendo y divisor,

y que en ambos tengan un mismo exponente, no deberán aparecer en el quociente; pero las que tengan en el dividendo un exponente mayor que en el divisor, deberán permanecer en el quociente con un exponente igual á la diferencia de aquellos dos. Por último se escribirán en el quociente las letras que sean peculiares de solo el dividendo. Estas son las reglas llamadas de las letras y de los exponentes.

Presentemos ahora toda la operacion executada conforme á estas reglas con los polinomios propuestos en el párrafo anterior, á fin que pueda servir de norma para todas las demas que puedan ofrecerse.

Dividendo.	*Divisor.*
$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$
$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2$	*Quociente.* $a^3-4a^2b+2b^3$

Primer residuo.

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$$
$$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3$$

Segundo residuo.

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$$
$$-10a^4b^3+4a^3b^4-8a^2b^5$$

Residuo final..... 0 0 0

Viendo que el primer término del dividendo y el primer término del divisor son ambos aditivos, sabremos ya que el primer término del quociente debe tener el signo +; y de consiguiente, siendo como es primer término, se puede omitir el signo. Dividiendo $5a^7$ por $5a^4$ resulta por quociente a^3, que se escribe en el lugar acostumbrado debaxo del divisor.

Se multiplican sucesivamente por este primer término del quociente los tres términos del divisor, y se escriben debaxo de los primeros términos del dividendo los del producto con signos contrarios á los que las reglas de la multiplicacion les asignan, para executar la sustraccion; con lo qual venimos á tener

$$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2.$$

Efectuada entonces la reduccion de términos semejantes, resulta él primer residuo

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5,$$

el qual se debe considerar como un segundo dividendo.

Observando que el primer término de este y el primer término del divisor tienen signos contrarios, inferirémos que el segundo término del quociente deberá tener el signo $-$. Así que, dividiendo $-20a^6b$ por $5a^4$ el resultado será $-4a^2b$; este será el segundo término del quociente total, y de consiguiente se le escribirá á continuacion del primero a^3. Multiplicando por aquel segundo término todo el divisor, y cambiando los signos, se formará el trinomio

$$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3;$$

el qual se escribirá debaxo de los primeros términos del segundo dividendo; y efectuada la reduccion de términos semejantes, resultará por segundo residuo

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Este se considerará como un tercer dividendo; y efectuada la division de su primer término por el primero del divisor, resultará $2b^3$ con el signo $+$, porque aquellos términos tienen un mismo signo. Escribirémos en el quociente $+2b^3$ á continuacion de a^3-4a^2b; multiplicarémos por aquel tercer término todo el divisor; y cambiando los signos de todos los términos del pro-

ducto lo escribirémos debaxo del tercer dividendo; y como efectuada la reduccion de términos semejantes no resulta residuo alguno, vendrémos en conocimiento de que el término que acabamos de hallar es el último del quociente, y de que $a^3 - 4a^2b + 2b^3$ es su expresion completa.

44 En la division de los polinomios conviene advertir que de las varias multiplicaciones sucesivas de todo el divisor por los diferentes términos del quociente suelen con freqüencia resultar algunos términos que no tienen semejantes en el dividendo propuesto, y que se deben dividir por el primer término del divisor. Estos términos extraños son los que en la primitiva multiplicacion, que siempre podemos suponer executada para formar el dividendo, desapareciéron al tiempo de reducir los términos semejantes del producto. He aquí á continuacion un exemplo muy notable de lo que acabamos de indicar.

Division.

$$\begin{array}{l|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \cline{2-2} -a^3 + a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline +a^2b - b^3 & \\ -a^2b + ab^2 & \\ \hline +ab^2 - b^3 & \\ -ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Multiplicacion.

$$\begin{array}{r} a - b \\ \times \ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^3 - a^2b \\ + a^2b - ab^2 \\ + ab^2 - b^3 \\ \hline \end{array}$$

Producto reducido... $a^3 - b^3$

El primer término a^3 del dividendo, dividido por el primer término del divisor, da por quociente a^2. Multiplicando por este quociente parcial todo el divisor y

cambiando los signos de los términos del producto, resultará $-a^3+a^2b$. El primer término de este resultado destruye al primer término del dividendo propuesto; pero como el segundo término a^2b no tiene semejante en el dividendo, y contiene la letra a, se le podrá dividir exâctamente por el primer término del divisor; y hecha la division resultará ab por segundo quociente parcial. Escrito este á continuacion del primero, y multiplicado por él todo el divisor, el producto con los signos cambiados será $-a^2b+ab^2$. El primer término de este resultado destruye el anterior semejante; pero permanece ab^2, el qual es exâctamente divisible por el primer término del divisor; y efectuada la division resulta b^2 por tercer quociente parcial. Colocado este á continuacion de los otros dos, se multiplica por él todo el divisor; y el producto con los signos cambiados es $-ab^2+b^3$. El primer término de este resultado destruye á su semejante é igual; y el segundo destruye al único término que aun quedaba del dividendo propuesto. Así que será el quociente completo a^2+ab+b^2.

Para hacer mas perceptible todo el mecanismo de la division, hemos puesto al lado de ella la multiplicacion del divisor por el quociente, la qual, como es bien sabido, se puede en todos casos considerar como la operacion primitiva con que se formó el dividendo. Cotejando las dos operaciones verémos que los términos, al parecer extraños, que de nuevo aparecen en la division, son justamente los productos parciales que por ser semejantes, iguales y con signos contrarios, se desvaneciéron en el resultado final de la multiplicacion.

La misma observacion puede hacerse dividiendo a^4-b^4, ó a^5-b^5, ó a^6-b^6 &c. por $a-b$; cuyos quo-

cientes son muy dignos de ser exâminados con la mayor atencion.

45 A veces ocurre que la letra, con respecto á la qual se ordenan los términos del dividendo y del divisor, tiene un mismo exponente en dos ó mas términos de uno de los dos polinomios ó de entrambos; y en tal caso se colocan en coluna todos los términos en que aquella letra tiene el mismo exponente; ó si se quiere, se ponen á continuacion unos de otros cuidando de que esten al mismo tiempo ordenados con respecto á alguna otra letra que en ellos concurra con la principal.

Propongámonos, por exemplo, dividir $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$ por $a^2-b^2-c^2$.

Teniendo como tenemos la absoluta facultad de ordenar los términos de los dos polinomios con respecto á qualquiera de las letras que entran en ellos, los ordenarémos con respecto á la a. Colocarémos pues por primer término del dividendo á $-a^6$; y quando tratemos de poner el segundo, nos ocurrirán dos, $-a^4b^2$ y $+2a^4c^2$, que por tener la letra a con el exponente inmediato inferior, pueden con igual razon ocupar aquel lugar: los pondrémos pues ambos en coluna á la derecha de primer término. En otra coluna pondrémos los dos términos a^2b^4 y $-a^2c^4$ que con igual razon pueden ocupar el tercer lugar; finalmente en la última coluna pondrémos los tres términos $+b^6$, $+2b^4c^2$, y $+b^2c^4$, en los quales no se halla la letra a, ordenándolos con respecto á la letra b, segun puede verse á la vuelta de la página siguiente.

El primer término $-a^6$ del dividendo, dividido por el primer término a^2 del divisor, da por quociente $-a^4$. Multiplicando por este quociente parcial todo el divisor;

cambiando todos los signos del producto para restarlo del dividendo; colocando en una misma coluna todos los términos en que la a tenga un mismo exponente; y reduciendo por último los términos semejantes, el residuo que resulte será un segundo dividendo parcial.

El primer término $-2a^4b^2$ de este nuevo dividendo, dividido por el primer término a^2 del divisor, da por segundo quociente parcial $-2a^2b^2$, que escribirémos á continuacion del primero. Multiplicando todo el divisor por el término que acabamos de hallar; cambiando todos los signos del producto para restarlo del dividendo; colocando en una misma coluna todos los términos en que la letra a tenga el mismo exponente; y reduciendo los términos que haya semejantes, el residuo que resulte será un tercer dividendo parcial.

Del mismo modo se continuará la operacion, y se hallarán todavía otros tres términos del quociente. En habiendo multiplicado por el último todo el divisor, y cambiado todos los signos del producto para restarlo, al tiempo de la reduccion de términos semejantes verémos que se destruyen todos: lo qual nos hará conocer que el quociente está completo, y que la division es exâcta.

Dividendo.	Divisor.
$-a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$ $+ 2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2$ $+ b^2c^4$	$a^2 - b^2 - c^2$
	$\left.\begin{array}{l} -a^4 - 2a^2b^2 - b^4 \\ + a^2c^2 - b^2c^2 \end{array}\right\}$ Quoc.

$$\begin{array}{l} +a^6 - a^4b^2 \\ \quad - a^4c^2 \end{array}$$

1.r residuo.. $\left\{\begin{array}{l} -2a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 \\ + a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 \\ \qquad + b^2c^4 \end{array}\right.$

Producto restado........ $\left\{\begin{array}{l} + 2a^4b^2 - 2a^2b^4 \\ \qquad - 2a^2b^2c^2 \end{array}\right.$

2.o residuo.. $\left\{\begin{array}{l} + a^4c^2 - a^2b^4 \ldots\ldots + b^6 \\ \qquad - 2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 \\ \qquad - a^2c^4 \quad + b^2c^4 \end{array}\right.$

Producto restado....... $\left\{\begin{array}{l} - a^4c^2 + a^2b^2c^2 \\ \qquad + a^2c^4 \end{array}\right.$

3.o residuo.. $\left\{\begin{array}{l} - a^2b^4 \ldots + b^6 \\ - a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 \\ \qquad + b^2c^4 \end{array}\right.$

Producto restado....... $\left\{\begin{array}{l} + a^2b^4 \quad - b^6 \\ \qquad - b^4c^2 \end{array}\right.$

4.o residuo.. $\left\{\begin{array}{l} - a^2b^2c^2 + b^4c^2 \\ \qquad + b^2c^4 \end{array}\right.$

Producto restado....... $\left\{\begin{array}{l} + a^2b^2c^2 - b^4c^2 \\ \qquad - b^2c^4 \end{array}\right.$

Residuo final... o .... o ....

46 En algunas ocasiones se efectúa con mucha prontitud y facilidad la division de los polinomios, des-

componiendo el dividendo en factores de una manera que suele ocurrirse á primera vista. Si hubiesemos, por exemplo, de dividir $8a^6-4a^3b^2+4a^3+2a^3-b^2+1$ por $2a^3-b^2+1$, observaríamos que los términos del divisor son los tres últimos del dividendo, y de ahí inferiríamos que para poderse efectuar la division es indispensable que el primer trinomio $8a^6-4a^3b^2+4a^3$ del dividendo sea exâctamente divisible por el divisor $2a^3-b^2+1$. Ahora bien, pronto se echa de ver que $4a^3$ es un factor comun de todos los términos de aquel trinomio, y que $8a^6-4a^3b^2+4a^3=4a^3(2a^3-b^2+1)$; por manera que todo el dividendo propuesto viene á ser:

$$4a^3(2a^3-b^2+1)+2a^3-b^2+1;$$

cuya expresion equivale á estotra:

$$(2a^3-b^2+1)(4a^3+1).$$

Suprimiendo pues de esta expresion el factor $2a^3-b^2+1$, estaria efectuada la division, y hallado el quociente exâcto $4a^3+1$, que es el otro factor.

Sobre este género de abreviaciones no es posible dar regla alguna general; la práctica del cálculo algebráico, que como qualquiera otra, no puede adquirirse sino exercitándose mucho en las operaciones, y observando y cotejando sus resultados, es la única que puede sugerir no pocas veces medios de hallarlos fácilmente, y con mucho ahorro de tiempo y de trabajo. Lo que creemos oportuno advertir de nuevo es que quando sepamos que á una ó mas multiplicaciones se han de seguir una ó mas divisiones, conviene por lo comun no efectuar, sino meramente indicar aquellas, para que permaneciendo mas á las claras los factores del dividendo, se efectúen con mas prontitud y facilidad estas.

De las fracciones algebráicas [1].

47 Siempre que no sea exâctamente divisible por un polinomio otro polinomio, y nos empeñemos en efectuar la division, llegarémos despues de un cierto número de operaciones parciales á un residuo cuyo primer término no podrá dividirse por el primer término del divisor, y que por este medio nos hará conocer la imposibilidad de conseguir nuestro intento, á lo menos completamente. Sirva de exemplo la division siguiente:

Dividendo	$a^3+a^2b+2b^3$	a^2+b^2.... Divisor
	$-a^3-ab^2$	$a+b$.... Quociente
1.º residuo......	$a^2b-ab^2+2b^3$	
	$-a^2b-b^3$	
2.º residuo......	$-ab^2+b^3$;	

en la qual el primer término ab^2 del segundo residuo no es exâctamente divisible por el primer término a^2 del divisor, y de consiguiente no se ve cómo pueda continuarse la division. En este caso y en todos los demas semejantes, se puede, á semejanza de lo practicado en la Aritmética, agregar al quociente una fraccion cuyo numerador sea el residuo y cuyo denominador sea el divisor. Así que en la division propuesta el quociente completo será

$$a+b+\frac{b^3-ab^2}{a^2+b^2}.$$

Segun esto *deberá terminarse la division de los po-*

1 No siendo qualquier quebrado, y con especialidad los algebráicos, sino la expresion del quociente de una division indicada, se deberá considerar este capítulo como una continuacion del anterior.

linomios, luego que lleguemos á un residuo cuyo primer término no contenga la letra con respecto á la qual se los haya ordenado, ó en caso que la contenga, sea con un exponente menor que el de la misma letra en el primer término del divisor.

48 Quando por no poderse efectuar la division de los polinomios es forzoso contentarnos con representar el quociente por medio de una fraccion, cuyo numerador sea el dividendo, y cuyo denominador sea el divisor, nos queda todavía el recurso de simplificar esta expresion; y para ello tenemos que averiguar si los dos términos de la fraccion tienen algun *factor*, *divisor* ó *medida comun*. Ya hemos expuesto (§. 41) el modo de simplificar una fraccion siempre que sea un monomio el factor comun de sus dos términos; pero como este factor comun pueda ser un polinomio que no podamos fácilmente descubrir á primera vista, nos valemos para hallarlo quando lo hay, y aun para averiguar si la fraccion es *irreducible*, del mismo método del qual hemos hecho uso en la Aritmética para determinar el *máxîmo divisor comun* de dos números qualesquiera.

Tratamos pues de hallar un divisor comun de dos polinomios, al qual se le llama el *máxîmo*, sin embargo de que no se pueda generalmente determinar la magnitud relativa de una expresion algebráica, mientras no se asignen valores particulares á las letras que entran en ella. La denominacion de *máxîmo* se da en el Algebra al divisor comun que tenga mas términos y mas factores en cada término, ó que sea de grado mas elevado; y su investigacion está fundada en el mismo principio que la del máxîmo divisor comun aritmético, á saber: *Todo divisor comun de dos cantidades qualesquiera debe ser divisor exâcto del residuo que resulte en la division de la cantidad mayor por la menor.*

La demostracion que de este principio dimos (*Arit.* §. 63) adquiere mayor claridad haciendo uso de los símbolos algebráicos. En efecto, si representamos por D el divisor comun de dos cantidades qualesquiera; si representamos asimismo por A el quociente que resulta de la division de la cantidad mayor por el divisor comun D; y por B el quociente que resulta de la division de la canti-

dad menor por el mismo divisor comun; las dos cantidades estarán bien representadas por AD y BD, es decir, por los productos formados del divisor comun y del factor por el qual está multiplicado en cada una de ellas. Por último si representamos por Q el quociente *entero* y por R el residuo de la division de la cantidad mayor por la menor, tendremos (*Aritmet.* §. 51) esta equacion:

$$AD = BD \times Q + R.$$

Si ahora dividimos por D ambos miembros de la equacion, resultará:

$$A = BQ + \frac{R}{D};$$

la qual nos dice que la cantidad representada por A se compone de las dos partes BQ y $\frac{R}{D}$. Siendo pues *enteros* A y una de sus partes BQ, deberá forzosamente serlo la otra parte $\frac{R}{D}$; lo qual es lo mismo que decir que R debe ser exâctamente divisible por D.

Con arreglo á este principio *averiguarémos en primer lugar si la cantidad mayor es exâctamente divisible por la menor; y si en esta primera division resultare algun residuo final, dividirémos por este residuo la cantidad menor; y si en esta segunda division resultase tambien residuo, dividirémos por este segundo al primero; así continuarémos dividiendo cada uno de los residuos por el inmediato siguiente; y si alguna de las divisiones fuere exâcta, la cantidad que en ella haya servido de divisor será el máxîmo comun divisor de las dos cantidades propuestas.* Mas para aplicar esta regla á las expresiones algebráicas se requieren ciertas observaciones y preparaciones que no eran necesarias en la Aritmética.

Por de contado será vano el empeño de hallar un divisor comun de dos cantidades que no tengan siquiera alguna letra comun; y en caso que tengan, como debe suponerse, algunas, deberémos ordenar todos los términos de ambos polinomios con respecto á una misma letra; escoger para dividendo el polinomio, en el qual tenga aquella letra el mayor exponente, y dexar para divisor el otro.

Sean, por exemplo, las dos cantidades

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3$$

cuyos términos estan ya ordenados con respecto á la letra a; y de las quales escogerémos la primera para dividendo, y la segunda para divisor. Ya desde el principio de la operacion se nos presenta una dificultad que jamas puede ocurrir en los números representados por guarismos; y es que el primer término del dividendo no es exâctamente divisible por el primer término del divisor á causa de los factores 4 y b que se hallan en este y no en áquel. Por lo que hace al factor b, fácilmente se nota que es comun á todos los términos del divisor; y no siéndolo á todos los del dividendo, se le puede suprimir de aquellos sin que por eso varíe el divisor comun de las dos cantidades propuestas; porque siendo el polinomio $4a^2b - 5ab^2 + b^3$ igual á $(4a^2 - 5ab + b^2)b$, ó lo que es lo mismo, siendo exâctamente divisible por b el polinomio $4a^2b - 5ab^2 + b^3$; y no siéndolo el otro polinomio propuesto, es consiguiente que b no sea factor comun de los dos, y que el divisor comun, si es que lo hay, deba ser la cantidad representada por $4a^2 - 5ab + b^2$ ó algun factor de esta. Queda pues reducida la qüestion á buscar el máxîmo divisor comun de las dos cantidades

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Por la misma razon que hemos podido suprimir de la segunda cantidad un factor b, que siendo comun á todos sus términos, no lo era tambien á los de la primera, podemos introducir en qualquiera de las dos un nuevo factor, con tal que no sea comun á todos los términos de la otra; sin que por eso varíe el máxîmo comun divisor de las dos, el qual es, como se sabe, el producto de los factores comunes de entrambas. De esta observacion nos aprovechamos para multiplicar el polinomio $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ por 4, que no es factor del polinomio $4a^2 - 5ab + b^2$, á fin de que por este medio venga á ser exâctamente divisible por el primer término del divisor el primer término del dividendo [1]. Así que tendremos para dividendo al polinomio $12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3$,

[1] Lo expuesto en este párrafo se puede fácilmente generalizar y reducir á este principio: *El máximo divisor comun de dos cantidades qualesquiera no padece alteracion alguna, porque se multiplique ó se divida una de ellas por cantidades que no contengan ningun factor de la otra.*

y para divisor al polinomio

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Efectuando despues de estas preparaciones la division de los primeros términos, resultará el quociente parcial $3a$. Multiplicando todo el divisor por este quociente, y restando del dividendo el producto, resultará el residuo

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3;$$

al qual considerarémos como un nuevo dividendo, porque el mas alto exponente de la a no es todavía menor que el de la misma letra en el primer término del divisor. Haciendo pues uso de las observaciones anteriores, suprimirémos el factor b comun á todos sus términos, y los multiplicarémos por 4 para que el primero de ellos sea exâctamente divisible por el primero del divisor. Así tendremos por segundo dividendo al polinomio

$$12a^2 + 4ab - 16b^2$$

y por divisor al mismo que antes.

Efectuando la division de los primeros términos, el segundo quociente parcial será 3. Multiplicando todo el divisor por este quociente, y restando del segundo dividendo el producto, resultará por segundo residuo, ó mas bien, por residuo final

$$19ab - 19b^2;$$

y la qüestion habrá quedado reducida á buscar el máxîmo comun divisor de este segundo residuo y de

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Notando que en este polinomio tiene la a, es decir, la letra que al principio de la operacion hemos escogido para ordenar los términos, mayor exponente que en el residuo final, nos deberá este servir de divisor; y el que antes lo era pasará á ser dividendo. Pero antes de comenzar esta nueva division, suprimirémos del divisor $19ab - 19b^2$ el factor $19b$ comun á todos sus términos sin ser factor del dividendo; y de este modo tendremos por dividendo á

$$4a^2 - 5ab + b^2$$

y por divisor á $a - b$.

Efectuando la division vemos que es exâcta; y de consiguiente sabemos que el binomio $a - b$ es el máxîmo divisor comun de las dos cantidades propuestas.

Retrocediendo desde esta última division hasta la primera, podemos cerciorarnos no solo de que el binomio $a-b$ es efectivamente divisor comun de los dos polinomios propuestos, sino tambien de que estos no pueden ambos dividirse exâctamente por otra cantidad mas compuesta ó de grado mas elevado que aquel binomio. Por otra parte, si dividimos por $a-b$ los dos polinomios

$$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3,\ \text{y}\ 4a^2b-5ab^2+b^3$$

los transformarémos en estotras expresiones:

$$(3a^2+b^2)(a-b),\ \text{y}\ (4ab-b^2)(a-b);$$

las quales nos estan indicando que su máxîmo comun divisor es $a-b$.

En habiéndose enterado de todo el pormenor de las operaciones que hemos executado en el caso anterior, será fácil resolver otros muchos. Con el objeto de exercitarse pueden los principiantes proponerse el hallar el máxîmo comun divisor de los polinomios

$$6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2,$$
$$9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3;$$

el qual es el binomio $3a^2-2c^2$.

49 Quando la letra con respecto á la qual se hayan ordenado los polinomios propuestos, tenga el mismo exponente en muchos términos del divisor, ocurre una dificultad que juntamente con el modo de superarla darémos á conocer en el exemplo siguiente:

Propongámonos hallar el máxîmo divisor comun de los dos trinomios

$$a^2b+ac^2-d^3\ \text{y}\ ab-ac+d^2$$

y los colocarémos como para una division ordinaria.

Dividendo....	$a^2b+ac^2-d^3$	$ab-ac+d^2$.... Divisor
	$-a^2b+a^2c-ad^2$	a .... Quociente
Residuo.........	$a^2c+ac^2-ad^2-d^3$	

Dividiendo, como es costumbre, el primer término del dividendo por el primer término del divisor, resulta por quociente a. Multiplicando por este quociente parcial todo el divisor, y restando del dividendo el producto, el residuo, que debe servir de nuevo dividendo, contendrá un término en el qual se hallará la letra a con el exponente 2, lo mismo que en el dividendo primitivo; por manera que despues de la primera division parcial nos hallamos en el

mismo estado que antes de comenzar la operacion; y continuándola de este modo, jamas se terminaria. En efecto, si considerando al residuo como segundo dividendo lo multiplicamos por b para que su primer término sea exâctamente divisible por ab, tendrémos esta segunda division parcial

$$\begin{array}{l|l} a^2bc + abc^2 - abd^2 - bd^3 & ab - ac + d^2 \\ -a^2bc + a^2c^2 - acd^2 & \overline{ac} \\ \hline \end{array}$$

Residuo......... $a^2c^2 + abc^2 - acd^2 - abd^2 - bd^3$;

en cuya expresion vemos que de nuevo aparece la letra a con el exponente 2, ó elevada al quadrado como antes.

Para precaver este inconveniente observarémos que el divisor $ab - ac + d^2 = a(b - c) + d^2$, reuniendo en un solo término los dos en los quales tiene el mismo exponente la letra que hemos elegido para ordenar los dos polinomios propuestos. Si ahora hacemos para mayor sencillez $b - c = m$, se transformará el divisor en $am + d^2$ y en tal caso será indispensable multiplicar por m todo el dividendo $a^2b + ac^2 - d^3$, para que su primer término sea exâctamente divisible por am. De este modo tomará la operacion este otro aspecto.

$$\begin{array}{ll|l} \text{Dividendo...} & a^2bm + ac^2m - d^3m & am + d^2 \text{........ Divisor} \\ & -a^2bm - abd^2 & \overline{ab + c^2 \text{........... Quociente}} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{1.}^\circ \text{ residuo...} & + ac^2m - abd^2 - d^3m \\ & -ac^2m - c^2d^2 \\ \hline \end{array}$$

2.° residuo....... $-abd^2 - c^2d^2 - d^3m$.

En el primer residuo se ve que ya ha desaparecido del dividendo la segunda potencia de a, y que solo ha quedado en él la primera potencia de la misma cantidad. Para hacer desaparecer tambien esta potencia, dividirémos el primer término ac^2m por am, y resultará por segundo quociente parcial c^2. Multiplicando por este quociente todo el divisor, y restando del primer residuo ó segundo dividendo el producto, resultará el segundo residuo. Considerando ahora á este segundo residuo como un tercer dividendo, suprimirémos de todos sus términos el factor comun d^2, que no se halla en todos los términos del divisor, y para poder efectuar la division los multiplicaré-

mos de nuevo por m. Así tendrémos que hacer esta tercera operacion parcial:

$$\begin{array}{l|l} -abm - c^2m - dm^2 & am + d^2 \\ \hline + abm + bd^2 & -b \end{array}$$

Residuo............... $bd^2 - c^2m - dm^2$.

No apareciendo ya en este último residuo la letra a, es de inferir que esta letra no debe entrar en la expresion del divisor comun que buscamos, si es que exîste.

En habiendo llegado á este punto, nos es imposible conservar ordenados los términos y continuar la division con respecto á la letra a; y puesto que el divisor comun, si lo hay, debe ser independiente de esta letra, es consiguiente que no solo haya de dividir exâctamente al residuo

$$bd^2 - c^2m - dm^2$$

y al divisor $am + d^2$,

sino tambien á cada uno de los términos de estas cantidades con separacion. Porque en general, *siempre que los términos de un polinomio qualquiera esten ordenados con respecto á una letra, en siendo exâctamente divisible todo el polinomio por una cantidad en cuya expresion no entre aquella letra, tambien será exâctamente divisible por la misma cantidad cada uno de los términos de por sí.*

Para convencerse de la verdad de este principio basta reflexîonar que no hallándose, como se supone, en el divisor la letra que se ha escogido para ordenar los términos del polinomio, debe aparecer en el quociente la misma letra con los mismos exponentes que tenia en el dividendo; y por la inversa, hallándose en este y en el quociente la misma letra con los mismos exponentes, la diferencia que exîsta entre aquellas cantidades, no puede ser otra que la de que en el dividendo cada potencia de la letra ha de estar multiplicada no solo por la cantidad que la multiplique en el quociente, sino tambien por todo el divisor.

A fin de que no quede oscuridad alguna en este razonamiento, supongamos que habiendo dividido por una cantidad monomia ó polinomia M, en cuya expresion no entre la letra a, á un polinomio cuyos términos estaban ordenados con respecto á la letra a, haya

resultado este quociente exâcto y ordenado con respecto á la misma letra: $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$;
en cuya expresion las letras mayúsculas A, B, C, D, E representan cantidades monomias ó polinomias independientes de la letra a. Si ahora multiplicamos por el divisor M todo el quociente, vendrémos en conocimiento de que el polinomio dividido es el siguiente:

$$MAa^4 + MBa^3 + MCa^2 + MDa + ME;$$

en el qual es fácil observar que no contiene mas ni ménos potencias de a que el quociente; y que el coeficiente [1] de cada una de estas potencias es exâctamente divisible por la misma cantidad M, por la qual suponemos exâctamente dividido todo el polinomio. Habiendo demostrado esta proposicion, volvamos á nuestro asunto.

Si tanto en el residuo $bd^2 - c^2m - dm^2$ como en el divisor $am + d^2$ restituimos el binomio $b - c$ en lugar de la letra m que lo representa, aquellas expresiones se transformarán en estotras:

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2,$$
$$a(b-c) + d^2;$$

y viendo que $b - c$ y d^2 no tienen divisor alguno comun, podemos estar ciertos de que tampoco lo tienen los dos trinomios primitivos.

Si no hubiésemos podido conocer á primera vista que las cantidades $b - c$ y d^2 no tenian divisor alguno comun, habríamos tenido que hacer esta averiguacion por el método general de las divisiones sucesivas; y suponiendo que lo tuviesen, y lo hubiésemos hallado, todavía nos restaba exâminar si podria dividir exâctamente al polinomio

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2.$$

50 En vez de dexar para el fin de la operacion el averiguar si los dos polínomios propuestos tienen ó no algun divisor comun independiente de la letra que haya servido para ordenar sus términos, es mucho mas ventajoso hacer antes de todo esta investigacion, porque de lo contrario se van complicando mas y mas los residuos de las diferentes divisiones parciales, y á conseqüencia va siendo cada vez mas penoso el cálculo.

1 Aunque (§. 17) hayamos asignado la denominacion de *coeficiente* al factor numérico que entra en la composicion de un término, se suele con freqüencia dar el mismo nombre á qualquier factor ó á qualquier combinacion de factores que en un término acompañen á una letra que por alguna razon es mirada como la principal.

Propongámonos por exemplo hallar el máxîmo divisor comun de los polinomios

$$a^4b^2 + a^3b^3 + b^4c^2 - a^4c^2 - a^3bc^2 - b^2c^4$$

$$\text{y} \quad a^2b + ab^2 + b^3 - a^2c - abc - b^2c;$$

y ordenando sus términos con respecto á la letra a, adquirirán esta forma:

$$(b^2 - c^2)\,a^4 + (b^3 - bc^2)\,a^3 + b^4c^2 - b^2c^4$$

$$(b - c)\,a^2 + (b^2 - bc)\,a + b^3 - b^2c.$$

Ahora bien, si estos polinomios tienen algun divisor comun en cuya expresion no entre la letra a, cada uno de los coeficientes de las diferentes potencias de la misma a será exâctamente divisible por el mismo divisor comun de los polinomios (§. 49), y de consiguiente lo serán tambien los dos binomios finales $b^4c^2 - b^2c^4$ y $b^3 - b^2c$, que se pueden mirar como coeficientes de a^0.

Comenzando pues nuestro exámen por los coeficientes $b^2 - c^2$ y $b - c$ de las potencias mas elevadas de a, indagarémos primeramente si tienen uno ó muchos divisores comunes; y despues verémos si todos los demas coeficientes de las otras potencias de a son exâctamente divisibles por la misma cantidad que aquellos dos primeros; es decir, si el divisor comun de los binomios $b^2 - c^2$ y $b - c$ lo es igualmente

de $b^3 - bc^2$ y $b^2 - bc$; de $b^4c^2 - b^2c^4$ y $b^3 - b^2c$.

Dividiendo $b^2 - c^2$ por $b - c$ resulta el quociente exâcto $b + c$; es pues $b - c$ divisor comun de los binomios $b^2 - c^2$ y $b - c$; y no pueden estos tener ningun otro divisor comun por quanto $b - c$ no es exâctamente divisible sino por sí mismo y por la unidad. Ahora solo nos resta averiguar si $b - c$ es divisor comun de los demas coeficientes de las otras potencias de a. Lo es en efecto, como lo comprueba el que dividiendo por $b - c$ los dos polinomios propuestos, resultan los quocientes exâctos

$$(b + c)\,a^4 + (b^2 + bc)\,a^3 + b^3c^2 + b^2c \;;$$

$$a^2 + ba + b^2.$$

A fin de reducir, si es posible, estas últimas expresiones á mayor grado de sencillez, convendrá exâminar si la primera de ellas es exâctamente divisible por el binomio $b + c$ coeficiente de a^4. Viendo que lo es, y no siéndolo la segunda, efectuarémos aquella division,

y así tendrémos estas otras dos expresiones bastante sencillas:

$$a^4 + ba^3 + b^2 c^2,$$
$$a^2 + ba + b^2;$$

cuyo maxîmo divisor comun nos propondrémos por último hallar.

Efectuando para ello las operaciones que prescribe la regla general (§. 48) resultará de la segunda division parcial un residuo que no tiene otra potencia de a sino la primera; y no siendo divisor comun de las dos cantidades este segundo residuo, se infiere que la letra a no entra en la expresion del maxîmo divisor comun de los dos polinomios primitivos, y que de consiguiente no tienen estos otro divisor comun que el binomio $b - c$.

Si ademas de este hubiésemos hallado algun otro en cuya expresion entrase la letra a, habria sido necesario multiplicar uno por otro para tener en el producto el máxîmo divisor comun que buscábamos.

Estas observaciones podrán ser suficientes para hallar sin gran dificultad el máxîmo comun divisor de dos polinomios qualesquiera, mayormente quando se haya adquirido algun manejo y expedicion en las operaciones algebráicas.

51 Las quatro *operaciones fundamentales*, es decir, la adicion, la sustraccion, la multiplicacion y la division se efectúan, del modo que es posible, con las fracciones algebráicas lo mismo que con las aritméticas; sin otra diferencia que la de observar, en todas las operaciones que prescriben las reglas establecidas para estas, los preceptos que en los capítulos anteriores hemos dado para sumar, restar, multiplicar y partir las cantidades algebráicas. Nos limitarémos pues á recordar aquellas reglas, aplicando cada una de ellas á un solo exemplo; y comenzarémos, como en la Aritmética, por la multiplicacion y la division de las fracciones, porque estas dos operaciones no requieren ninguna transformacion preparatoria.

1.º Por lo que respecta á la multiplicacion:

$$\frac{a}{b}\times c = c\times\frac{a}{b} = \frac{ac}{b};$$ (*Aritm.* §. 67 y 70)

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$ (*Aritm.* §. 72).

2.° Por lo que hace á la division:

$$\frac{a}{b}:c = \frac{a}{b}\times\frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$ (*Aritm.* §. 67)

$$c:\frac{a}{b} = c\times\frac{b}{a} = \frac{bc}{a}$$ (*Aritm.* §. 75)

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$ (*Aritm.* §. 76).

3.° Las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, reducidas á un comun denominador se transforman en estotras:

$$\frac{ad}{bd},\ \frac{bc}{bd}$$ (*Aritm.* §. 80).

Las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, se transforman, por medio de igual reduccion, en las siguientes:

$$\frac{adfh}{bdfh},\ \frac{cbfh}{dbfh},\ \frac{ebdh}{fbdh},\ \frac{gbdf}{hbdf}.$$

52 El método que expusimos (*Aritm.* §. 81) para obtener en ciertos casos un denominador comun mas sencillo que el que por la regla general resultaria, puede aplicarse fácilmente á las fracciones algebráicas. Si estas fueren, por exemplo, $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, será muy fácil ver que los dos denominadores serian enteramente iguales si f fuera factor del primero, y c lo fuera del segundo. Se reducirán pues las dos fracciones propuestas á un comun denominador, multiplicando los dos términos de la primera por f, y los de la segunda por c; con lo qual ten-

drémos las fracciones $\frac{af}{bcf}$, $\frac{cd}{bcf}$, mas sencillas que $\frac{abf}{bbcf}$, $\frac{bcd}{bbcf}$ que por la regla general hubieran resultado.

Generalmente, *reúnanse en un producto todos los factores diferentes que se hallen en los denominadores de todas las fracciones propuestas, y así se tendrá el denominador comun de todas ellas; despues multiplíquese el numerador de cada fraccion por todos los factores de aquel producto que no se hallen en el denominador primitivo de aquella fraccion, y así se tendrán los nuevos numeradores.*

Si las fracciones fueren, por exemplo, $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, formarémos el producto b^2cfg, y este deberá ser el denominador comun; despues multiplicarémos el numerador de la primera fraccion por fg; el de la segunda por bcg, y el de la tercera por b^2f; y así resultarán

$$\frac{afg}{b^2cfg},\ \frac{bcdg}{b^2cfg},\ \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

Si en el denominador primitivo de alguna de las fracciones propuestas estuviesen reunidos como factores los denominadores de todas las demas, solo habrá que executar la segunda parte de la regla anterior.

53 Por lo que hace á la adicion de las fracciones que tengan un mismo denominador, como $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$,

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}$$

es decir, se suman los numeradores, y á la suma se le pone el denominador comun.

Por lo que respecta á la sustraccion de las fracciones que tengan un mismo denominador, como si hubiésemos de restar $\frac{b}{d}$ de $\frac{a}{d}$ será $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$; es decir, restarémos del numerador del minuendo el del sustraendo, y al residuo le pondrémos el denominador comun.

Si las fracciones que se hayan de sumar ó restar no tuvieren un mismo denominador, será muy fácil hacer que lo tengan.

Finalmente, por lo respectivo á las reducciones de expresiones *mixtas* á fracciones, y al contrario, será

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c} \text{ (Arit. §. 71)}$$

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$$

$$\frac{b}{c} - a = \frac{b}{c} - \frac{ac}{a} = \frac{b-ac}{c}$$

Por la inversa:

$$\frac{ac}{a} = \frac{ac}{a} + \frac{b}{a} = c + \frac{b}{a}$$

$$\frac{ac-b}{a} = \frac{ac}{a} - \frac{b}{a} = c - \frac{b}{a}$$

$$\frac{b-ac}{a} = \frac{b}{a} - \frac{ac}{a} = \frac{b}{a} - c.$$

En todos los exemplos que hemos propuesto son monomios los términos de las fracciones; en caso que sean polinomios se executarán las mismas operaciones, observando para ello las reglas establecidas para la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de las cantidades complexas. Así que

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(c+d)(c-d)}=\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{c^2-d^2};$$

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}:\frac{a-b}{c-d}=\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a^2+b^2)(c-d)}{(c+d)(a-b)}=$$

$$\frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd};$$

y así de todas las demas operaciones que suelen executarse con los quebrados.

54 Quando los principiantes hayan comprehendido todo lo que hasta aquí hemos expuesto, y sobre todo quando hayan adquirido cierta expedicion en la execucion de las operaciones que hemos enseñado á hacer con las cantidades algebráicas, se hallarán en estado de resolver qualquiera equacion de primer grado por complicada que sea.

Si, por exemplo, de la propuesta de alguna qüestion se hubiere deducido la equacion siguiente:

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b},$$

lo primero que harémos será hacer desaparecer los denominadores; é indicando las operaciones que debemos executar para ello (§. 13), será:

$$(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)=$$
$$2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b).$$

Efectuando ahora las multiplicaciones indicadas, resultará:

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c+12a^2b-8ab^2-4b^3=$$
$$6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc.$$

Reuniendo por medio de la trasposicion en un solo miembro todos los términos en que se halla la x, y en otro todos los términos que no contienen esta letra, y reduciendo términos semejantes tendremos estas otras equaciones:

$$-3a^2x+8abx+3b^2x=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$
$$3b^2x+8abx-3a^2x=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$
$$x(3b^2+8ab-3a^2)=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$

y últimamente,

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{3b^2+8ab-3a^2}.$$

De las equaciones del primer grado que tienen dos incógnitas; y explicacion de ciertas expresiones que resultan de los cálculos algebráicos.

55 En las qüestiones que al principio de este tratado hemos resuelto con el auxîlio de los símbolos algebráicos, tan solo una de las letras de que nos valíamos para represèntar todas las cantidades de que hacia mencion la propuesta, denotaba una cantidad desconocida; y todas las demas letras eran símbolos de cantidades conocidas. A veces es mucho mas cómodo representar dos de las cantidades incógnitas con dos letras distintas; y en tal caso es absolutamente necesario que la propuesta contenga explícita ó implícitamente dos equaciones, independientes la una de la otra; pues de lo contrario no se podrán determinar los valores de las incógnitas.

La qüestion, por exemplo, que propusimos (§. 3), enunciada en los términos en que se halla al fin del §. 4, nos está á primera vista indicando que en ella podemos emplear dos letras distintas para representar los dos números desconocidos.

En efecto, si designamos

por x al número menor de los incógnitos;
por y al mayor;
por a la suma de ellos, conocida;

por b la diferencia de ellos, tambien conocida; la propuesta nos da estas dos equaciones:

$$x+y=a;$$

$$y-x=b.$$

Aunque ninguna de estas dos equaciones es por sí sola suficiente para determinar el valor de ninguno de los números desconocidos; si en qualquiera de ellas despejamos una de las incógnitas, por exemplo en la segunda la y, resultará:

$$y=b+x.$$

Esta última equacion no nos da á conocer, es verdad, el valor que buscamos de la y, ó lo que es lo mismo, del número mayor incógnito; pero nos hace ver que la combinacion ó binomio $b+x$ es equivalente á la y. Si pues en la primera equacion sustituimos el binomio $b+x$ en lugar de la y, se transformará aquella equacion en otra que no tendrá mas incógnita que la x, y de la qual podrémos por el método ya expuesto deducir el valor de esta incógnita.

En efecto, hecha que sea la sustitucion, tendrémos:

$$x+b+x=a$$

ó lo que es lo mismo, $2x+b=a$

$$2x=a-b$$

$$x=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

Sustituyendo ahora esta expresion del valor de x en la equacion

$$y=b+x,$$

resultará

$$y=b+\frac{a-b}{2}=\frac{2b+a-b}{2}=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}.$$

Así que, tendrémos de los números que buscamos las mismas expresiones que antes habíamos hallado (§. 3). No podia menos de ser así, en atencion á que si bien se reflexîona, la última solucion no se diferencia de la anterior sino en que en la una se ha traducido al lenguage algebráico una equacion que en la otra habíamos expresado en lenguage vulgar; pero de ella, expresada de uno y de otro modo, hemos deducido que el mayor número desconocido era equivalente á $x+b$.

56 He aquí otra qüestion:

Un artesano ha estado trabajando 12 dias en una obra; y tanto por sus jornales como por los de un hijo suyo que ha trabajado en la misma obra por espacio de siete dias, ha recibido 222 reales. Volviéron á trabajar él por espacio de ocho dias, y su hijo por el de cinco dias; y ganando iguales jornales que antes, ha recibido 150 reales. Se pregunta: *¿quántos reales ganaba diariamente el padre, y quántos el hijo?*

Representemos por x el número de reales que el padre ganaba por dia; y por y el número de reales que ganaba diariamente el hijo;

12 jornales del padre vendrán á ser $12x$ reales;

7 jornales del hijo serán $7y$.

Tendrémos pues con arreglo á la propuesta de la qüestion,

$$12x+7y=222.$$

8 jornales del padre serán $8x$;

5 jornales del hijo serán $5y$;

y de consiguiente $8x+5y=150$.

Discurriendo como en el exemplo anterior, deducirémos de la primera equacion

$$y=\frac{222-12x}{7}$$

Multiplicando por 5 esta última expresion, y sustituyendo el producto en lugar del término $5y$ de la segunda equacion, se transformará esta en estotra:

$$8x+\frac{1110-60x}{7}=150,$$

la qual no tiene ya mas incógnita que la x; y resolviendo la última equacion, tendrémos estas otras:

$$56x+1110-60x=1050;$$
$$1110-4x=1050.$$

Trasponiendo al segundo miembro el término sustractivo $4x$ con el fin de hacerlo aditivo, ó mas bien con el de quitarle el signo, tendrémos:

$$1110-1050=4x.$$

Sin necesidad de trasponer al segundo miembro el término sustractivo $4x$, pudiéramos haber deducido de la equacion $1110-4x=1050$, que $4x=1110-1050=60$, en habiendo advertido que $4x$ representa el *sustraendo*, 1110 el *minuendo*, y 1050 el *residuo;* y teniendo presente que *todo sustraendo es igual al minuendo menos el residuo.*

Si pues $4x=60$, será $x=\frac{60}{4}=15$.

Ganaba pues el padre 15 reales al dia; y sustituyendo este valor en la expresion que antes hemos hallado, $y=\frac{222-12x}{7}$, se transformará en

$$y=\frac{222-12\times 15}{7}=\frac{222-180}{7}=\frac{42}{7}=6.$$

Son pues 6 reales los que el hijo ganaba por dia.

57 Si observando á la letra la regla general de la trasposicion de términos (§. 10), hubiésemos dexado solo en el primer miembro el único término $-4x$ en

que se halla la incógnita, hubiera resultado

$$-4x=1050-1110;$$

y puesto que 1110 equivale á $1050+60$, esta última equacion se hubiera transformado en estotra:

$$-4x=1050-1050-60$$

y por último en estotra:

$$-4x=-60.$$

Así hubiéramos venido á parar á una equacion, en la qual tanto el primer miembro como el segundo son *sustraendos* sin minuendo alguno; y acaso no habríamos sabido descifrarla. Ahora que ya sabemos que de la equacion $1110-4x=1050$ se deduce seguramente que $4x=1110-1050=60$, podrémos venir en conocimiento de que la equacion

$$-4x=-60$$

nos quiere decir que lo mismo es restar de qualquier minuendo la cantidad $4x$ que restar 60; y en una palabra que $4x$ es lo mismo que 60; y de consiguiente que $x=15$.

De aquí podrémos deducir que generalmente *tenemos facultad de cambiar los signos de los términos de uno de los miembros de una equacion, con tal que cambiemos los de todos los términos del otro miembro.*

58 Antes de buscar con el auxîlio de las letras la solucion general del problema propuesto (§. 56) exâminemos aun otro caso particular del mismo problema. Supongamos que se nos diga que la primera suma cobrada por el artesano fue 138 reales, y la segunda 90; y siendo las mismas todas las demas circunstancias de la qüestion, se nos pregunte como antes, *¿quánto ganaba el padre y quánto el hijo por dia?*

Las equaciones de esta nueva qüestion serán:

$$12x+7y=138;$$
$$8x+5y=90.$$

De la primera se deduce que

$$y=\frac{138-12x}{7}.$$

Multiplicando por 5 esta última expresion, y sustituyendo el producto en lugar de $5y$ en la segunda equacion, se transformará en estotra:

$$8x+\frac{690-60x}{7}=90.$$

Multiplicando por 7 para que desaparezca el denominador, resultará:

$$56x+690-60x=630.$$

y de consiguiente

$$56x-60x=630-690$$

ó cambiando los signos de ambos miembros para que los minuendos sean, como deben ser, mayores que los sustraendos: $60x-56x=690-630;$

y efectuando las sustracciones:

$$4x=60;$$

de donde se deduce:

$$x=\frac{60}{4}=15.$$

Sustituyendo este valor de la x en la expresion que antes hemos hallado del valor de y, resultará:

$$y=\frac{138-180}{7}=\frac{138-138-42}{7}=\frac{-42}{7}.$$

La expresion que acabamos de hallar del valor de y nos está indicando que de 138 se ha de restar 180, y que el residuo se ha de dividir por 7; pero siendo absolutamente impracticable la sustraccion, ¿qué querrá decirnos aquella formula ó esta otra, á la qual viene á reducirse

$$y = \frac{-42}{7}?$$

Ya sabemos lo que significa una combinacion de dos cantidades, en la qual la que tiene antepuesto el signo — es menor que la otra; pero quando la cantidad sustractiva es mayor que la otra, y sobre todo quando está enteramente sola, ¿qué podrá esto significar? El mejor medio de aclarar esta duda será retroceder á las equaciones primitivas que la han originado; pues siendo estas una verdadera traduccion de la propuesta, será mas fácil descubrir en ellas las circunstancias de la qüestion que han ocasionado la dificultad de que tratamos.

Si en la primera equacion

$$12x + 7y = 138$$

sustituimos en lugar de la x su valor 15, se transformará en estotra:

$$180 + 7y = 138;$$

la qual nos dice que los jornales de solo el padre importaban mas que los del padre y del hijo juntos; y siendo esto un absurdo, es claro que la propuesta envuelve condiciones incompatibles.

Si en la segunda equacion primitiva hacemos igual sustitucion, resultará:

$$120 + 5y = 90,$$

la qual nos está indicando el mismo absurdo que la anterior.

Vemos, pues, que de la propuesta se infiere que los jornales de solo el padre importaban mas que los del padre y del hijo juntos: y de consiguiente podemos estar ciertos de que la qüestion es absurda, y su solucion enteramente imposible. Pudiéramos muy bien quedar satisfechos con haber descubierto esta verdad; pero si em-

peñándonos en profundizar mas, nos propusiéramos averiguar qué alteracion deberian padecer las condiciones para que conservándose los mismos números dados resultase una qüestion sin absurdo alguno, no seria difícil echar de ver que si el hijo hubiese disminuido con sus gastos el haber del padre, en vez de aumentarlo con sus jornales, hubiera sido necesario restar de la suma que el padre habia ganado todo lo que importaban las expensas del hijo; y ya entonces no habria incompatibilidad ni contradiccion alguna en la propuesta, ni de consiguiente en las equaciones procedentes de ella; pues en tal caso serían:

$$180-7y=138$$
$$120-5y=90;$$

y de qualquiera de ellas se deduciria que

$$y=6;$$

lo qual quiere decir que así en cada uno de los siete dias de la primera temporada como en cada uno de los cinco de la segunda habia ocasionado el hijo un gasto de 6 reales; y de ahí es que el padre, sin embargo de ganar 15 reales diarios, no habia sacado de producto neto en los doce primeros dias mas de 138 reales; ni en los ocho segundos mas de 90.

Ahora no será ya difícil presentar la propuesta de la qüestion en términos que no envuelva contradiccion alguna, y que sin alterar los números dados sea posible su solucion.

Un artesano, dirémos, *ha estado trabajando doce dias en una obra, y por haber tenido siete dias en su compañía á un hijo suyo que gastaba una parte del jornal del padre, no ha venido este á recibir al fin de la temporada mas de 138 reales. Volvió á trabajar en la misma*

obra por espacio de ocho dias, y á causa del gasto que en cinco dias le ocasionó su hijo, no percibió al cabo de esta segunda temporada mas de 90 reales. Suponiéndose que en ambas temporadas ha sido uno mismo el jornal del padre, y que tambien lo ha sido el gasto diario del hijo, se pregunta: *¿quánto ganaba el padre, y quánto gastaba el hijo en cada dia?*

Designando por x el número de reales que el padre ganaba, y por y el de los que gastaba el hijo, las equaciones propias de esta qüestion serán:

$$12x-7y=138;$$
$$8x-5y=90.$$

Deduciendo de la segunda, por exemplo, que

$$x=\frac{90+5y}{8};$$

multiplicando esta última expresion por 12, y sustituyendo el producto en vez de $12x$ en la primera equacion, se transformará esta en

$$\frac{1080+60y}{8}-7y=138;$$

y de esta última se deducirán estotras:

$$1080+60y-56y=1104;$$
$$4y=1104-1080=24;$$
$$y=\frac{24}{4}=6.$$

Sustituyendo este valor de y en la equacion

$$x=\frac{90+5y}{8},$$

se transformará en $x=\frac{90+30}{8}=\frac{120}{8}=15.$

Ganaba pues el padre 15 reales, y gastaba el hijo 6 reales en cada dia.

59 Aunque un resultado absurdo de un razonamiento bien formado no arguya por lo comun otra cosa sino lo absurdo del principio sobre que está fundado; siempre que hallemos para valor de una incógnita un número que tenga antepuesto el signo $-$, es decir, un número que indique ser *sustraendo* sin *minuendo*, no solo inferirémos que la qüestion, en los términos en que se nos haya propuesto, envuelve alguna contradiccion é incompatibilidad en sus condiciones, sino tambien que en rectificando alguna de estas, habrá de resultar otra qüestion análoga á la primera, sin absurdo alguno, y á la qual dará solucion el mismo número que antes hemos hallado. La rectificacion que en tales casos es necesario hacer en las condiciones, se reduce á que se deba sumar alguna cantidad que la propuesta nos mandaba restar, ó al contrario; ó á que deba ser minuendo el que la propuesta nos indicaba como sustraendo, y *vice versa*.

Supongamos, por exemplo, que habiendo resuelto primeramente la qüestion propuesta al fin del §. anterior, nos propusiésemos en seguida la del §. 56 en la hipótesi de que el hijo habia disminuido con sus gastos los salarios del padre; en cuyo caso las equaciones fundamentales serian:

$$12x-7y=222;$$
$$8x-5y=150;$$

de las quales vendríamos á deducir finalmente que

$$x=15; \quad y=\frac{-42}{7}.$$

Esta última expresion nos indicaria que la propuesta de la qüestion contenia algun absurdo, ó lo que es lo mismo, condiciones incompatibles; y si tratando de descubrir quál sea el absurdo que la propuesta contiene,

sustituimos en las equaciones primitivas el valor de x, se transformarán en estas otras:

$$180-7y=222;$$
$$120-5y=150.$$

Estas equaciones nos hacen bien perceptible el absurdo que deseábamos conocer; pues es bien manifiesta la imposibilidad de que despues de quitar de 180 una cantidad qualquiera haya quedado de residuo 222; y despues de quitar de 120 otra cantidad qualquiera, por pequeña que sea, haya quedado de residuo 150. En la suposicion de que los números 180 y 120 sean verdaderos, es absolutamente imposible deducir de ellos los resultados 222 y 150 por sustraccion; es indispensable por el contrario hacerles alguna adicion, y de consiguiente là propuesta de la qüestion y las equaciones fundamentales deberán ser las que ya hemos visto (§. 56); de las quales hemos deducido que $x=15$; $y=\frac{42}{7}=6$.

Siempre que á causa de haber alguna incompatibilidad en las condiciones del problema, resulta sustractivo el valor de alguna incógnita, se dice que la solucion es *negativa*.

60 Por medio de estos exemplos podemos venir en conocimiento de que las qüestiones del primer grado pueden contener ciertas condiciones incompatibles, ó sean ciertas contradicciones, que el Algebra no solo nos da á conocer conduciéndonos á un resultado sustractivo ó con el signo $-$, sino que tambien nos indica el modo de rectificar las propuestas, haciendo sustractivas algunas cantidades que se habian supuesto aditivas, ó al contrario.

Esto es lo que se debe entender quando se dice que las *soluciones negativas* resuelven los problemas en un sentido contrario al de sus propuestas; y aunque en realidad el problema propuesto, que suponemos absurdo, sea muy distinto del problema rectificado y libre de toda contradiccion, se les mira sin embargo como idénticos, porque ademas de contener ambos los mismos números conocidos é incógnitos, para pasar del uno al otro y hacer útil la *solucion negativa*, ó por mejor decir, para que la solucion dexe de ser *negativa*, basta una mera mutacion de los signos + y −.

61. Aunque estos signos no designáron en su primitiva institucion sino las operaciones de sumar y restar; quando se echó de ver que de la resolucion de las equaciones resultaban en ciertos casos para valores de las incógnitas números con el signo −, es decir, números que se debian restar sin haber de qué, no se contentáron los algebristas con haber conocido por este medio que las qüestiones que los habian conducido á estos resultados absurdos, eran imposibles, ni tampoco con haber descubierto el modo de rectificar las condiciones para que desapareciese la incompatibilidad que antes habia; sino que ademas hiciéron este razonamiento:

Si de un problema bien puesto en equacion se deduce que una incógnita debe ser $= -6$, por exemplo, es consiguiente que si mirando como un símbolo de una cantidad á la combinacion -6 del guarismo y del signo que le antecede, la sometemos á todas las operaciones indicadas en la qüestion, el resultado deba satisfacer á esta segun esté propuesta, y sin necesidad de variar previamente ninguna de sus condiciones.

Sirva de exemplo la misma qüestion que hemos

propuesto (§. 58). Despues de haberla traducido fielmente al lenguage algebráico, y haber deducido de las equaciones en que la hemos transformado, que

$$x = 15 \,; y = \frac{-42}{7},$$

deberémos inferir que si executamos con el número 15 y con la expresion, bien que absurda, $\frac{-42}{7}$ las operaciones indicadas en la propuesta, y representadas en las equaciones

$$12x + 7y = 138,$$
$$8x + 5y = 90,$$

los resultados deberán ser exâctamente conformes á lo que la misma propuesta requiere; pues de lo contrario, no estarian bien deducidos los valores de x é y.

Sustituyendo primeramente el valor de x, se transformarán aquellas dos equaciones en estotras:

$$180 + 7y = 138,$$
$$120 + 5y = 90.$$

Solo nos restará ahora sustituir en estas dos últimas equaciones la expresion $\frac{-42}{7}$ que hemos hallado del valor de y. Al efectuar esta sustitucion nos ocurre la dificultad de que no siendo $\frac{-42}{7}$ ninguno de los símbolos que conocemos de las cantidades, no sabemos cómo executar con aquella expresion las operaciones indicadas en las dos equaciones.

Para superar esta dificultad se ocurrió efectuar por via de ensayo estas operaciones, haciendo uso de las reglas de los signos establecidas (§§. 31 y 43) para los símbolos de las verdaderas cantidades. Conforme á lo prescrito en aquellas reglas, se tuvo á -6 por equiva-

lente á $\frac{-42}{7}$; en lugar de $7y$ se sustituyó -42 ; y en lugar de $5y$ se sustituyó -30.

De este modo y haciendo uso de la regla de los signos (§. 18), se transformáron las equaciones en

$$180-42=138;$$
$$120-30=90;$$

las quales son rigurosamente verdaderas, y las mismas que hemos hallado despues de haber rectificado las condiciones de la propuesta, y haber hecho desaparecer la incompatibilidad que en ellas habia.

Asimismo, despues de haber deducido de las equaciones que hemos formado (§. 59),

$$12x-7y=222,$$
$$8x-5y=150,$$

que los valores de las incógnitas eran

$$x=15;\ y=\frac{-42}{7};$$

si sustituimos estos valores, deberán resultar las cantidades que la propuesta requiere.

Sustituyendo primeramente el valor de x, que no ofrece dificultad alguna, tendrémos:

$$180-7y=222,$$
$$120-5y=150.$$

Si ahora en lugar de $7y$ ponemos -42,
y en lugar de $5y$.............. -30;

si teniendo ademas presente que en las equaciones estan indicadas dos sustracciones, hacemos uso de la regla de los signos establecida (§. 20), se transformarán las últimas equaciones en estotras:

$$180+42=222;$$
$$120+30=150;$$

las quales son verdaderas y las mismas que resultan de la propuesta del problema, segun se halla en el §. 56, es decir, corregida y sin que haya contradiccion ó incompatibilidad alguna en sus condiciones.

Luego que se observó que la aplicacion de las reglas de los signos á estas expresiones absurdas procedentes de qüestiones imposibles producia resultados verdaderos, fuéron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de verdaderas cantidades; se las designó con el nombre de *cantidades negativas*; se las sometió á todas las operaciones del cálculo; y se dixo que si las soluciones negativas indicaban un error en la propuesta de la qüestion, el Algebra lo corregia.

62 Puesto que las cantidades negativas resuelven en cierto sentido los problemas de donde han dimanado, conviene exâminar el modo de emplearlas en los cálculos, y establecer reglas seguras para efectuar las operaciones que las qüestiones puedan exîgir que se executen con ellas.

Las reglas de los signos establecidas (§§. 18, 20, 31 *y* 43) no se han demostrado hasta ahora en el supuesto de que las operaciones se hayan de executar con cantidades sustractivas aisladas. Establecimos, por exemplo, que si de a hubiésemos de restar la cantidad representada por la combinacion $b-c$, el residuo debia representarse por $a-b+c$; pero no hemos hecho ver que si de a se ha de restar la cantidad, si puede así llamarse, $-c$, el residuo deberá representarse por $a+c$. Pudiera ciertamente decirse que el razonamiento que hicimos para demostrar la exâctitud del residuo $a-b+c$, era independiente de la magnitud de las cantidades representadas por estos símbolos, y que de consiguiente debia

tener lugar aun quando llegase á ser $b=o$, con lo qual la expresion $b-c$ se reduciria á $-c$, y la combinacion $a-b+c$ quedaria reducida á $a+c$. Pero acaso no satisfará á todos esta prueba; y como la teoría de las cantidades negativas ha venido á ser una de las mas importantes del Algebra, y ha dado ocasion á varias disputas; es necesario apoyarla sobre los fundamentos mas sólidos que sea posible. Para conseguirlo retrocedamos al orígen de las cantidades negativas.

Todas las que se llaman *cantidades negativas* proceden de sustracciones en las quales el sustraendo es mayor que el minuendo; y como la mayor cantidad que se puede restar de otra sea la igual á ella, en cuyo caso el residuo es cero; quando se nos manda quitar de una cantidad otra mayor hacemos mas palpable la imposibilidad de executarlo, indicando quánto falta para que el minuendo sea igual al sustraendo, y de consiguiente para que sea *cero* el residuo. Restamos pues, contra lo que se nos ha mandado, del sustraendo el minuendo, y á este residuo le anteponemos el signo — para indicar que hemos efectuado la operacion en un órden inverso. Si por exemplo nos prescribe una fórmula que quitemos 5 de 3, ó lo que es lo mismo, si tenemos en ella $3-5$, equivalente á $3-3-2$; viendo que la sustraccion prescrita es verdaderamente imposible, y que de consiguiente es vano el intento de determinar el resultado, sustituimos en su lugar -2, ó lo que es lo mismo restamos 3 de 5, y al residuo le anteponemos el signo — para tener un indicio de haber executado la operacion al revés; y lo que en realidad debe representarnos el símbolo -2, no es el residuo, pues en el caso propuesto es un absurdo suponer que pueda haberlo, sino solo que es necesario añadir 2 á

la combinacion $3 - 5$ para que se iguale el minuendo con el sustraendo, y se reduzca á cero toda la combinacion. En efecto $3 - 5 + 2 = 0$. Lo mismo puede decirse de qualquiera de estos símbolos algebráicos que se llaman cantidades negativas; $-a$, por exemplo, debe indicarnos que una fórmula prescribia restar de una cantidad otra mayor; y siendo esto imposible, se ha executado al revés la operacion; y al resultado a de esta se le antepuso el signo $-$, para que con esta modificacion nos diese á conocer que es necesario añadir la cantidad a á la combinacion de cantidades de la qual provino el símbolo $-a$, para reducir á cero el resultado de toda la combinacion. Esto ha dado ocasion á que se dixese que *las cantidades negativas son menores que cero;* expresion que para dexar de ser absurda, debe entenderse en el sentido que acabamos de darla. Pasemos ya á hacer ver que las reglas de los signos pueden en todos casos aplicarse sin rezelo alguno á los símbolos algebráicos llamados *cantidades negativas*.

Nadie puede dudar de que las expresiones $a-a$; $b-b$; $c-c$ &c. son equivalentes á *cero*, y de consiguiente son otros tantos símbolos del mismo *cero*. Ahora bien, si á una cantidad qualquiera representada por a le agregamos la combinacion $b-b$, la que de nuevo resulta $a+b-b$, no vendrá á ser otra cosa que un nuevo modo de representar la misma cantidad a; el qual por entrar en la nueva combinacion los símbolos $+b$ y $-b$, nos hace ver con mas claridad el efecto que en la cantidad a debe producir la sustraccion de b, ó la de $-b$; pues para ello basta borrar de aquella expresion qualquiera de las dos cantidades que nos propongamos quitar. En efecto si de a nos proponemos quitar b, ó como,

dicen, $+b$, borrando esta cantidad en la expresion $a+b-b$, el residuo será $a-b$; resultado enteramente conforme con el convenio adoptado (§. 2). Si por el contrario nos proponemos quitar de a la cantidad negativa $-b$, suprimiendo este término en la expresion $a+b-b$, el resultado será $a+b$, como lo hubiéramos hallado aplicando á este caso la regla de los signos establecida (§. 20).

Por lo que hace á la multiplicacion es fácil echar de ver que el producto de $a-a$ por $+b$ debe ser $ab-ab$; porque siendo igual á *cero* el multiplicando, debe tambien ser igual á *cero* el producto; y siendo indudablemente ab el primer término de este, el segundo deberá ser $-ab$, para que destruya al primero. De aquí se deducirá que $-a\times+b=-ab$.

Si nos proponemos multiplicar a por $b-b$, el producto deberá ser $ab-ab$; porque siendo igual á *cero* el multiplicador, debe tambien ser igual á *cero* el producto; y como el primer término de este sea indudablemente ab, el segundo deberá ser $-ab$ para destruir al primero. Será pues $a\times-b=-ab$.

Finalmente, si tratamos de multiplicar $-a$ por $b-b$, sabiendo ya que el primer término del producto es $-ab$, el segundo no podrá menos de ser $+ab$, para que todo el producto se reduzca, como debe, á *cero*, por ser igual á *cero* el multiplicador. Así que, será $-a\times-b=+ab$.

Cotejando estos resultados con los que hubiéramos inmediatamente hallado aplicando á estas cantidades sustractivas aisladas, ó sean cantidades negativas, las reglas de los signos establecidas (§. 31), veremos que son exâctamente los mismos.

Por lo que respecta á la division, teniendo pre-

sente que el divisor y el quociente son los factores del dividendo, y que de consiguiente el signo de este debe resultar, si así puede decirse, de los signos de sus factores; será fácil deducir el signo del quociente quando se conozcan el del dividendo y el del divisor; y así se verá que la regla establecida (§. 42) es tambien aplicable al caso presente.

En general, *quando tratemos de efectuar qualquiera de las quatro operaciones fundamentales con las cantidades sustractivas aisladas, ó como dicen, con las cantidades negativas, deberémos observar para los signos de los resultados las mismas reglas que si aquellas cantidades fuesen partes de polinomios.*

63 Recapitulando quanto hemos expuesto tocante á las que se llaman *cantidades negativas*, dirémos que en realidad son unas expresiones absurdas de los resultados de sustracciones impracticables; que como tales son indicios seguros de alguna incompatibilidad que hay en la propuesta de la qüestion, de la qual hayan dimanado; de consiguiente nos dan á conocer que no es posible resolver la qüestion sin que antes se rectifique alguna de sus condiciones, haciendo sustractiva alguna cantidad que antes se habia supuesto aditiva, ó al contrario; y últimamente, que se puede venir en conocimiento del modo de executar esta rectificacion considerando á las expresiones realmente absurdas -6; -8; $-a$; $-b$ &c., como si fuesen verdaderos símbolos de cantidades, y haciendo uso de las reglas anteriormente establecidas de los signos, en las operaciones que nos propongamos executar con aquellas expresiones. Estos son por lo menos hechos constantemente observados, y que se pueden observar en todos los casos en que resulten tales

expresiones; por manera que quando se dice, por exemplo, que restando $-b$ de a, el residuo es $a+b$, el único modo de interpretar esta expresion en términos que tenga sentido, es decir que la regla de los signos establecida para efectuar la sustraccion con los verdaderos símbolos de las cantidades, aplicada aun á aquellos otros que no lo son, corrige el absurdo que habia en lo que se nos mandaba executar: se nos decia que restásemos y debiamos sumar. Para nueva confirmacion de todo esto propongámonos estotro problema.

64 *Un correo ha salido de Barcelona para Madrid al mismo tiempo que otro ha salido de Madrid para ir por el mismo camino á Barcelona: se sabe quánta es la distancia de un pueblo á otro, y quántas leguas anda por hora cada uno de los dos correos:* y se nos pregunta, *¿en qué punto del camino*, ó lo que viene á ser lo mismo, *á quántas leguas de qualquiera de aquellos dos pueblos se encontrarán los dos correos?*

A fin de presentar con mayor claridad las circunstancias de la qüestion representarémos con una línea la distancia de los dos puntos de partida, é indicarémos estos dos puntos por las letras mayúsculas *B* y *M*, y por *R* el punto del encuentro.

B *R* *M*

Representarémos ademas, como es de costumbre, por letras minúsculas las cantidades conocidas é incógnitas que entran en la qüestion; á saber:

por a el número de leguas que distan uno de otro los puntos de partida, ó como se suele decir, la distancia *BM*;

por b el número de leguas que anda por hora el correo que ha salido del punto *B*;

por c el número de leguas que anda por hora el correo que ha salido del punto M;

por x el número de leguas que el primer correo ha andado desde el punto B hasta el punto R del encuentro;

por y el número de leguas que el segundo correo ha andado desde el punto M hasta el mismo punto R.

Esto supuesto, es fácil echar de ver que quando los dos correos se encuentren habrán corrido entre los dos toda la distancia que hay desde uno de los puntos de partida al otro, puesto que la distancia total BM se compone de las dos parciales BR y MR. Tendrémos, pues, en primer lugar esta equacion:

$$x+y=a.$$

Considerando ahora que en la propuesta se nos dice que los dos correos salieron á un mismo tiempo de sus respectivos puntos de partida, inferirémos que anduvieron en un mismo número de horas las distancias parciales representadas por x é y. Sabiendo por otra parte que dividiendo el número total de leguas que cada correo haya andado por el número de leguas que ande por hora, ha de resultar el número de horas que ha empleado en el camino, inferirémos que el símbolo $\frac{x}{b}$ del quociente de aquella division representará el número de horas que ha gastado el primer correo en ir desde el punto B hasta el punto R; y que el símbolo $\frac{y}{c}$ representa el número de horas que el segundo correo ha necesitado para ir desde M á R. Y puesto que segun la propuesta de la qüestion deben ser iguales estos dos números de horas,

tendremos esta segunda equacion:

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Son pues las dos equaciones fundamentales de la qüestion estas:

$$x+y=a;$$
$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

De la segunda se deduce fácilmente que

$$x=\frac{by}{c};$$

y sustituyendo esta expresion del valor de x en la primera equacion, se transformará esta en estotra:

$$\frac{by}{c}+y=a;$$

de la qual se deducen sin dificultad alguna las siguientes:

$$by+cy=ac;$$
$$y(b+c)=ac;$$
$$y=\frac{ac}{b+c}.$$

Si ahora sustituimos esta expresion del valor de y, en la que antes hallamos del de x,

$$x=\frac{b}{c}y,$$

se transformará esta en

$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b+c}=\frac{abc}{c(b+c)}=\frac{ab}{b+c}.$$

No hallándose el signo − en ninguna de las dos fórmulas que nos prescriben la serie de operaciones que debemos efectuar con las tres cantidades conocidas para hallar las incógnitas, ó lo que es lo mismo, no habiendo que executar sustraccion alguna para hallar estos va-

lores, no hay que temer que, sean quales fueren los números representados por las letras a, b, c, pueda resultar *cantidad negativa* para valor de alguna de las incógnitas; y de consiguiente será posible en todos casos la solucion de la qüestion propuesta y de todas las que sean enteramente semejantes á ella, sin necesidad de hacer alteracion alguna en las condiciones que encierra. En efecto, bien fácil es ver que necesariamente se deben encontrar dos correos que á un mismo tiempo y por un mismo camino vayan el uno desde B á M, y el otro desde M á B, ó como se dice, que caminen *en sentidos opuestos.*

65 Supongamos ahora que habiendo salido como antes los dos correos á un mismo tiempo de los puntos B y M, se dirijan ambos por un mismo camino hácia otro punto C situado á la derecha de M; ó como suele decirse, que caminen *en un mismo sentido*:

B M R C

en cuyo caso no podrá ya tratarse de averiguar dónde se encontrarán los dos correos, sino dónde alcanzará el que ha salido de B al que ha salido de M, suponiendo como es indispensable para ello, que el primero ande con mas velocidad que el segundo; ni el punto R podrá ya estar entre B y M sino á la derecha de este último.

Conservando las mismas letras para representar las cantidades análogas á las del problema anterior, observarémos en primer lugar que en este caso la distancia BM de los dos puntos de partida es la diferencia de las distancias BR y MR andadas en un mismo tiempo por los dos correos desde sus respectivos puntos de partida hasta el punto en que el primero alcanzó al segundo. Tendrémos, pues, esta primera equacion:

$$x-y=a;$$

y la segunda $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$

que expresa la igualdad de los tiempos empleados en correr los espacios *BR* y *MR*, permanecerá la misma que antes.

Estas dos últimas equaciones, resueltas como las anteriores, dan: $x=\frac{by}{c}$;

$\frac{by}{c}-y=a$; $by-cy=ac$; $y(b-c)=ac$;

$$y=\frac{ac}{b-c};$$

$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b-c}=\frac{abc}{c(b-c)};$$

y finalmente $x=\frac{ab}{b-c}$.

Como en estas fórmulas está indicada una sustraccion en la qual b es el minuendo y c el sustraendo; para que sea practicable esta sustraccion, y á conseqüencia sea posible la solucion del problema en los términos en que lo hemos propuesto, es absolutamente necesario que la cantidad representada por b sea mayor que la representada por c; es decir, que el correo que haya salido de *B* ande con mas velocidad que el que haya salido de *M*. Solo en este caso serán, como suele decirse, *positivos* los valores de x é y.

Si por exemplo fuese

$$b=3;\ c=1\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{4};$$

sería $b-c=3-1\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$;

y de consiguiente $x=\frac{12}{7}a$;

$$y=\tfrac{5}{7}a;$$

y así sabríamos quánto distaba el punto en que debe verificarse el alcance, de cada uno de los puntos de partida, puesto que se supone conocida la mutua distancia de estos representada por a.

Pero si en la propuesta de algun caso particular se nos hubiese dado el valor de b menor que el de c, ya dexaba de ser practicable la sustraccion que las fórmulas prescriben; sería imposible la solucion del problema en los términos en que lo hemos propuesto; y así nos lo indicarian los valores negativos de las incógnitas.

Si por exemplo fuese

$$b=1\tfrac{1}{2};\ c=2;$$

seria $b-c=-\frac{1}{2};\ x=-3a;\ y=-4a.$

B M R C

Las expresiones que acabamos de hallar de los valores de x é y, por lo mismo que son absurdas, estando como estan rectamente deducidas de la propuesta, nos dan inmediatamente á conocer que el problema es insoluble como no se varíe alguna de sus condiciones. Y en efecto ¿qué cosa mas absurda que suponer que dirigiéndose los dos correos hácia el punto C, situado segun nos lo presenta la figura; y saliendo á un mismo tiempo de los puntos B y M, pueda el que salga de B alcanzar jamas al otro, caminando mas despacio que él?

66 Sin embargo, si con aquellas expresiones absurdas executamos las operaciones indicadas en las equaciones fundamentales, de donde han dimanado,

$$x-y=a;$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c};$$

haciendo uso para ello de las reglas de los signos, tendrémos estotras:

$$-3a+4a=a;$$

$$-3a\times\frac{2}{3}=-\frac{4a}{2};$$

las quales son rigorosamente verdaderas y exâctas; y con solo atender á los signos que estan antepuestos á los términos del primer miembro de la primera equacion, vendrémos en conocimiento del modo de rectificar la propuesta de la qüestion y de hacer desaparecer el absurdo que contenia.

En efecto, en aquel primer miembro vemos que de $4a$ está restado $3a$; ó lo que es lo mismo, del camino andado por el correo que salió de M está restado el camino andado por el correo que salió de B, y así resulta la distancia de los dos puntos de partida. Ahora bien, es muy fácil echar de ver que esto no puede absolutamente verificarse sin que los correos se dirigiesen á un punto C, no situado á la derecha del punto M como la propuesta suponia, sino á la izquierda del punto B, segun lo representa la siguiente figura:

C R B M

en cuyo caso deberá alcanzar el correo que salió de M al otro y no al contrario, en un punto R situado á la izquierda del B y no á la derecha del M.

En este caso la distancia MR menos la distancia BR será igual á BM; y de consiguiente tendrémos esta primera equacion

$$y-x=a;$$

y siendo la segunda $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$;

será fácil deducir de ellas estas otras:

$$x=\frac{ab}{c-b};\qquad y=\frac{ac}{c-b};$$

y sustituyendo en estas fórmulas los valores supuestos de b y c, resultarán

$$x=3a;$$
$$y=4a;$$

es decir, valores sin nota alguna de absurdos; valores, como suele decirse, *positivos*, y que resuelven la nueva qüestion en los mismos términos y sin necesidad de alterar ninguna de las condiciones con que últimamente la hemos propuesto.

67 En la qüestion del §. 65, propuesta con toda la generalidad de que es susceptible, ocurre un caso en el qual es absolutamente imposible la solucion, sin que por mas alteraciones y modificaciones que se hagan en las condiciones, pueda desaparecer el absurdo. Esto se verifica quando sean iguales los valores de b y de c, ó lo que es lo mismo, quando se suponga que los dos correos caminan con velocidades iguales. En tal caso, hácia qualquier lado que marchen en un mismo sentido los dos correos, conservarán constantemente una distancia igual á la que haya entre los puntos de partida, y de consiguiente ninguno de los dos llegará jamas á alcanzar al otro. Este absurdo, que ninguna modificacion de las condiciones hará desaparecer, se dexa ver con bastante claridad en las mismas equaciones fundamentales de la qüestion; porque si en ellas hacemos $b=c$, ó lo que es lo mismo, si sustituimos b en lugar de c, la segunda equacion

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$$

se transformará en estotra:

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b};$$

de la qual se deduce que $x=y$.

A conseqüencia de esto la primera equacion

$$x-y=a; \text{ ó } y-x=a;$$

se transformará en

$$x-x=a; \text{ ó } 0=a;$$

resultado evidentemente absurdo; pues que nos presenta como nula una distancia cuya magnitud se nos ha dado en la propuesta del problema.

68 Este absurdo se nos manifiesta de un modo muy singular en las fórmulas ó últimas expresiones de los valores de las incógnitas

$$x=\frac{ab}{b-c}; \; y=\frac{ac}{b-c};$$

pues suponiendo en ellas $b=c$, el denominador ó divisor se hace *cero*, y se transforman en estas:

$$x=\frac{ab}{0}; \; y=\frac{ac}{0}.$$

No es fácil imaginarse quál pueda ser el quociente de una division quando el divisor sea *cero*. Lo único que se ve es que si fuere muy pequeño el exceso que b lleve á c, serán muy grandes los valores de x é y; y que quanto menor sea aquel exceso, tanto mayores serán estos valores; porque suponiendo, como aquí se supone, un dividendo constante, quanto menor sea el divisor, tanto mayor será el quociente (*Aritm.* §. 50). En efecto, si fuere $b=2$; $c=1,99$; será $b-c=0,01$; y de consiguiente $x=\frac{2a}{0,01}=200a$; $y=\frac{1,99a}{0,01}=199a$. Si fuere $b=2$; $c=1,9999$; será $b-c=0,0001$; y de consiguiente

$$x=\frac{2a}{0,0001}=20000a; \; y=\frac{1,9999a}{0,0001}=19999a;$$

donde se ve que quanto menor es la diferencia repre-

sentada por $b-c$, tanto mayores van siendo los valores de x é y.

Pero como por mas pequeña que sea una cantidad, no pueda decirse con verdad que es rigorosamente igual á *cero;* por mas pequeña que supongamos la diferencia representada por $b-c$, y de consiguiente por grandes que imaginemos los valores de x é y; jamas podrémos llegar á expresar los que corresponden al caso en que sea $b=c$.

Esta particularidad de no ser posible designar en tal caso por ningun número, por grande que se le suponga, el valor de ninguna incógnita, se expresa diciendo que este valor es *infinito;* y á toda expresion de la forma $\frac{m}{0}$, cuyo denominador es *cero*, se la mira como un símbolo de un valor que por grande es *inasignable*, ó como suele decirse, es *infinito.*

No es pues el *infinito* matemático otra cosa que una idea negativa, de la qual nos valemos para expresar la absoluta imposibilidad de asignar número alguno tan grande, que sea capaz de resolver la qüestion que nos haya conducido á fórmulas semejantes á las que acabamos de exâminar.

Una vez que un razonamiento rectamente formado nos ha conducido á tales expresiones ó fórmulas, se nos podria preguntar, ¿ cómo satisfacen á las equaciones fundamentales de la qüestion los valores que hemos hallado

$$x=\frac{ab}{0};\ y=\frac{ac}{0}\ ?$$

puesto que es una propiedad esencial del Algebra que en executando conforme á sus reglas las operaciones indicadas en la propuesta con los símbolos que finalmente

resulten de los valores de las incógnitas, sean los que fueren, han de satisfacer á las equaciones fundamentales del problema.

En contestacion á esta pregunta sustituirémos aquellas expresiones en las equaciones

$$x-y=a;\ \frac{x}{b}=\frac{y}{b};$$

que corresponden al caso en que $b=c$; y se transformará la primera en estotra:

$$\frac{ab}{0}-\frac{ab}{0}=a;$$

de la qual se deducen estas:

$$\frac{ab-ab}{0}=a;\ ab-ab=a\times 0;\ a(b-b)=a\times 0;\ 0=0;$$

por ser $a\times 0=0$.

La segunda equacion se transforma por medio de la sustitucion en estotra:

$$\frac{ab}{0\times b}=\frac{ab}{0\times b};$$

cuyos miembros son enteramente iguales. Estan pues completamente satisfechas las dos equaciones fundamentales del problema.

Todavía tenemos otro medio de venir en conocimiento del absurdo que la propuesta envuelve, y de descubrir si es ó no posible hacerlo desaparecer por alguna modificacion de las condiciones. Para esto dividirémos por x los miembros de la equacion $x-x=a$, en la qual se transforma la primera equacion fundamental despues que de la segunda deducimos que $x=y$. Aquella division nos dará

$$1-1=\frac{a}{x},\text{ ó lo que es lo mismo, } 0=\frac{a}{x}.$$

Esta última equacion, rectamente deducida de la propuesta, nos da á conocer que todo el absurdo de la qüestion viene á reducirse á exîgir que sea igual á *cero* el quebrado ó quociente $\frac{a}{x}$; cosa que jamas podrá verificarse como no sea tambien igual á *cero* el numerador ó dividendo a. Con todo, como á medida que crece el divisor, disminuye el quociente, quanto mayor sea el valor que asignemos á x, tanto mas se aproxîmará á *cero* el valor de $\frac{a}{x}$; bien que jamas podrá ser exâctamente igual á *cero*, segun requiere la propuesta del problema [1].

Con razon pues el Algebra nos da del valor de la x en este caso una expresion á la qual no puede equivaler exâctamente número alguno por grande que sea; con razon nos da á entender que aquel valor es *inasignable* por grande, ó como se dice, es *infinito*; indicándonos por este medio que de ningun modo es posible hacer desaparecer enteramente el absurdo que la propuesta envuelve. Lo mas que podrémos hacer será disminuir, quanto queramos, el error, aumentando mas y mas el valor que asignemos á x; como nos lo indica la gran magnitud

1 Puesto que $\frac{a}{x}$ no puede jamas ser exâctamente igual á *cero*, pero puede aproxîmarse á serlo quanto se quiera, será *cero* el *límite* de la fraccion $\frac{a}{x}$ (*Aritm.* §. 101). Algunos llaman *infinitamente pequeñas* á las cantidades cuyo *límite* es *cero*; otros llaman *cantidad infinitamente pequeña* al mismo *cero*, considerado como *límite* de aquellas otras cantidades. Ni en uno ni en otro sentido tiene aquella expresion la propiedad, exâctitud y claridad apetecibles; pero por su brevedad podrá admitirse siempre que previamente se fixe el sentido en que se la use.

que esta incógnita va adquiriendo á medida que se va acercando á *cero* el residuo $b-c$.

69 Si caminando los dos correos con igual velocidad y en un mismo sentido, se supusiese ademas que hubiesen salido de un mismo punto y á un mismo tiempo, seria ridículo el querer determinar el punto en que se reunian; pues esta reunion debia en tal caso verificarse en todos los puntos del espacio que anduviesen. Sin embargo, es digno de verse cómo nos manifiestan esta particularidad las expresiones que antes hemos hallado de los valores de x é y, modificadas segun lo exîgen las circunstancias de la nueva qüestion.

M
B C

En ella se supone que los puntos B y M de partida se han confundido en uno solo, y de consiguiente la distancia de ellos $a=0$; por otra parte se supone que $b=c$. Vendrán pues á transformarse las fórmulas generales en estotras: $x=\frac{0\times b}{0}=\frac{0}{0}$; $y=\frac{0\times c}{0}=\frac{0}{0}$.

He ahí dos expresiones de quocientes en las quales el dividendo y el divisor son ambos *cero*. Para descifrarlas volvamos á las equaciones fundamentales, y verémos que se reducen en este caso á

$$x-y=0;$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b};$$

y deduciéndose de la segunda que $x=y$, se transformará la primera en una de estotras:

$$x-x=0;\ \text{ó}\ x=x;$$

$$y-y=0;\ \text{ó}\ y=y.$$

Expresiones semejantes á estas últimas, á las quales se les

ha dado el nombre de *equaciones idénticas*, y que dexan enteramente indeterminado el valor de la incógnita, son generalmente el resultado final á que nos conducen todas aquellas qüestiones en que se supone peculiar de alguna sola cantidad una propiedad comun á todas las de su especie. En el caso presente nos indican que sea la que fuere la distancia á que los dos correos se hallen del punto de partida, estarán constantemente reunidos, y así queda absolutamente indeterminada aquella distancia.

Se ve pues, que la expresion $\frac{0}{0}$ que de la fórmula general deduximos para este caso particular, no es aquí otra cosa que un símbolo de una cantidad indeterminada. Decimos *aquí*, porque hay casos en que no es este el significado de aquella expresion; pero tambien el orígen de ella es muy diferente.

70 Darémos un exemplo de estos otros casos en la expresion

$$\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$$

la qual se transforma en $\frac{0}{0}$ si dexándola en la forma en que se nos presenta, suponemos que sea $a=b$; pero si echamos de ver que los dos términos de la fraccion tienen el factor comun $a-b$, y suprimiendo este factor comun reducimos la fraccion á su mas simple expresion, se transformará primeramente en

$$\frac{a(a+b)}{b};$$

y haciendo en esta expresion $a=b$, será su valor $2a$.

Vemos pues que en este caso la expresion $\frac{0}{0}$ tie-

ne un valor determinado qual suponemos ser $2a$, porque el orígen de ella ha sido un factor comun al numerador y al denominador de la fórmula propuesta, el qual se reducia á *cero* en el supuesto de ser $a=b$. Pero las fórmulas generales de los valores de x é y, que en el párrafo anterior se reduxéron á $\frac{0}{0}$, no tenian factor alguno comun al numerador y al denominador, y de consiguiente eran irreducibles á mas sencilla expresion.

De esto se sigue que quando alguna sustitucion particular transforme en $\frac{0}{0}$ una fórmula general fraccionaria, debemos ante todas cosas averiguar si el numerador y el denominador tienen algun factor comun que reduciéndose á *cero* por medio de la sustitucion, haga que tambien se reduzcan á *cero* los dos términos de la fraccion. En caso que lo tengan deberémos suprimirlo antes de hacer la sustitucion, y de este modo vendremos en conocimiento del verdadero valor de la expresion propuesta. Es necesario confesar que no siempre basta esto para determinar aquel valor; pero los límites á que nos hemos propuesto ceñir este tratado no nos permiten extendernos mas sobre este asunto, y nos obligan á diferir para quando tratemos del cálculo diferencial la exposicion de los métodos generales para hallar el verdadero valor de las expresiones transformadas por alguna sustitucion en $\frac{0}{0}$.

71 Lo expuesto hace ver con bastante claridad que en habiendo traducido fielmente al lenguage algebráico la propuesta de un problema, las fórmulas algebráicas que por último resultado deduzcamos de las equaciones

fundamentales nos darán valores que satisfarán completamente á todas las condiciones de la qüestion siempre que su solucion sea posible. Quando no lo sea por razon de algun absurdo que la propuesta envuelva, las mismas fórmulas nos lo darán á conocer juntamente con la modificacion que á veces basta hacer en las condiciones para que desaparezca la incompatibilidad que antes tenian, y venga así á formarse con los mismos datos otra qüestion algo parecida á la anterior, y cuya solucion sea posible. Si el absurdo que la propuesta envuelve fuere tal que ninguna modificacion de las condiciones pueda hacerlo desaparecer, el Algebra tiene tambien medios de manifestarnos con ciertas expresiones que con las cantidades que se suponen conocidas no es posible resolver qüestion alguna análoga en cierto sentido á la propuesta; y no menos los tiene para indicarnos que alguna propiedad, que se ha supuesto peculiar de una sola cantidad desconocida, es comun á todas las de su especie. En suma, con el auxîlio del lenguage algebráico no solo resolvemos las qüestiones cuya solucion es posible, sino que tambien descubrimos los que se pueden muy bien llamar *diferentes grados de imposibilidad* para conseguirlo: de todo lo qual irémos viendo nuevas pruebas en lo sucesivo.

72 Es muy digno de observarse cómo representa el Algebra la diferencia que fácilmente se advierte en las circunstancias de las dos qüestiones propuestas en los §§. 64 y 65, en la primera de las quales caminaba hácia *B* el correo que habia salido de *M*, y en la segunda hácia el lado opuesto. Cotejemos con este objeto las equaciones primitivas y las fórmulas finales correspondientes á entrambas qüestiones, y verémos que en la

una la primera equacion fundamental es:

$$x+y=a;$$

y en la otra:

$$x-y=a;$$

y siendo en ambas una misma la segunda equacion, pasemos á hacer igual cotejo de las fórmulas finales. En la primera qüestion hemos hallado que

$$x=\frac{ab}{b+c}; \qquad y=\frac{ac}{b+c};$$

y en la segunda:

$$x=\frac{ab}{b-c}; \qquad y=\frac{ac}{b-c}.$$

En las equaciones vemos que la y, símbolo del camino andado por el correo que salió de M, está sumada en la primera qüestion y restada en la segunda; en la primera tiene el signo $+$, y en la segunda el signo $-$; ó como suelen decir, en la primera es *positiva*, y en la segunda *negativa*.

En el denominador de las fórmulas respectivas á la primera qüestion, la c que representa el número de leguas que el mismo correo anda en cada hora, está sumada con la b; y en las de la segunda está restada de la misma b. Por manera, que con la mera mutacion de un signo se pueden aplicar á la segunda qüestion las fórmulas de la primera, y al contrario; por cuya razon en habiendo resuelto la una se puede mirar como resuelta la otra. Así que se dice que el Algebra nos da en la solucion de una qüestion las de otras muchas qüestiones análogas.

El problema tercero del §. 14 puede ser un nuevo exemplo de esto. En la propuesta de aquel problema supusimos que el padre debia al hijo una cantidad re-

presentada por d, y hallamos por fórmula final

$$x = \frac{bc + d}{a + b}.$$

Pues ahora, si quisiéramos que esta fórmula sirviese aun para el caso en que el alcance hubiese sido contra el hijo y á favor del padre, no tendriamos que hacer otra cosa sino mudar el signo de la d símbolo del alcance; y resultaria para este nuevo caso:

$$x = \frac{bc - d}{a + b}.$$

Y si supusiéramos que en el ajuste de cuentas habian quedado padre é hijo en paz, con solo hacer la $d = 0$, ó lo que equivale á esto, con solo suprimir de la fórmula anteriormente hallada la d, tendriamos:

$$x = \frac{bc}{a + b}.$$

Es sumamente fácil comprobar estas dos soluciones, poniendo separadamente en equacion los dos últimos problemas, y resolviéndolos como si cada uno de ellos fuese el primero de su especie que se nos hubiese propuesto.

Esta aplicacion, que con freqüencia suele hacerse de una fórmula hallada para cierto caso particular á otros casos análogos, es orígen de muchos valores *negativos*, que indican, no precisamente que los nuevos problemas contienen algun absurdo, como lo indicarian si directamente los hubiésemos puesto en equacion, sino que para aplicar á los nuevos casos la fórmula anteriormente hallada es necesario hacer alguna mutacion de signos por razon de alguna diferencia de circunstancias que haya entre el caso para el qual se halló primitivamente la fórmula, y los nuevos á que se la haya apli-

cado. Ya se nos presentarán ocasiones de manifestar toda la importancia de ésta observacion.

73 Si hemos designado con dos letras distintas las cantidades que nos proponíamos hallar en los problemas de los §§. 56 y 64, ha sido solo con el objeto de presentar exemplos de equaciones con dos incógnitas, y de dar á conocer el modo de resolverlas; pero pudimos muy bien haberlos resuelto ambos por medio de una equacion con una sola incógnita.

En efecto, habiéndosenos dicho en la propuesta del primero que el artesano habia recibido al fin de la primera temporada 222 reales por valor de sus 12 jornales y de los 7 de su hijo, es consiguiente que si representamos, como antes, por y cada jornal del hijo, $7y$ represente la suma de los 7 jornales de este; $222-7y$ representará la de los 12 jornales del padre, y $\frac{222-7y}{12}$ vendrá á ser una expresion de cada uno de los jornales de este último.

Habiéndosenos igualmente dicho que al cabo de la segunda temporada habia recibido 150 reales por valor de sus 8 jornales y de los 5 de su hijo, $\frac{150-5y}{8}$ vendrá á ser otra expresion de cada uno de los jornales del padre.

Podrémos, pues, formar esta equacion:

$$\frac{222-7y}{12}=\frac{150-5y}{8};$$

la qual es suficiente para resolver el problema.

En el del §. 64 es fácil ver que si designa por x el

B R M

camino BR andado por el correo que salga de B, $a-x$ representará el camino MR andado por el correo que

salga de M, en el número de horas que medien entre el momento de la salida y el del encuentro. La fraccion $\frac{x}{b}$ será una expresion de aquel número de horas; $\frac{a-x}{c}$ será otra expresion del mismo número; y de consiguiente podrémos formar esta equacion:

$$\frac{x}{b}=\frac{a-x}{c};$$

de la qual se deducen fácilmente estotras:

$$cx=ab-bx;\ cx+bx=ab;\ x(b+c)=ab;\ x=\frac{ab}{b+c}.$$

Entre estas soluciones y las que anteriormente hemos dado (§§. 56 y 64) de los mismos problemas, no hay mas diferencia que el haber aquí formado y resuelto la primera equacion en lenguage vulgar y sin valernos del algebráico; y bien se ve que quanto mas adelantemos en el razonamiento sin mas auxîlio que el idioma ordinario, tanto menos habrá que hacer con el simbólico para llegar á la conclusion.

74 Suele proponérsenos el problema del §. 64 con una nueva circunstancia que no hace mas difícil su solucion.

B R C M

Se supone que uno de los dos correos (por exemplo, el que salió del punto M) *se puso en camino un número* d *de horas antes que el otro.*

Todo el efecto que esta nueva circunstancia produce, no viene á ser en realidad otra cosa que haber transferido el primer punto de partida á otro punto C, y haber por consiguiente disminuido la distancia de los dos puntos de partida; porque el correo que sale de M,

y anda en cada hora c leguas, en d horas habrá caminado cd leguas, y se hallará en otro punto C quando llegue á salir de B el otro correo. Así que la distancia de uno á otro no será ya la que hay de B á M sino la de B á C; no será ya a, sino $a-cd$. Sustituyendo $a-cd$ en lugar de a en la equacion del §. anterior, se transformará esta en la siguiente: $\frac{x}{b}=\frac{a-cd-x}{c}$;

de la qual se deduce que $x=\frac{ab-bcd}{b+c}$.

Si los correos caminasen en un mismo sentido, como supusimos en el problema del §. 65,

B M C R

el intervalo de los nuevos puntos de partida B y C seria $a+cd$. Siendo pues x el camino BR andado por un correo hasta el punto R de la reunion, el camino CR andado en el mismo tiempo por el otro correo será $x-a-cd$, y de consiguiente tendrémos esta equacion:

$$\frac{x}{b}=\frac{x-a-cd}{c};$$

de la qual se deduce que $x=\frac{ab+bcd}{b-c}$.

75 En el supuesto de que los correos caminen en sentidos opuestos, y con la nueva circunstancia de haber salido el uno de ellos del punto M un número d de horas antes que el otro saliese del punto B, puede resultar para la x un valor negativo, cuya interpretacion ofrece alguna dificultad. Esto será en el caso en que los números d y c sean tales que su producto cd, símbolo del camino MC andado por un correo antes de la salida del otro, sea mayor que a, es decir, que la distancia MB.

C R B M

En tal caso el correo que ha salido de M se hallará en un punto C situado á la izquierda de B antes de haber salido de este último punto el otro correo; y puesto que este otro camina hácia M, es un absurdo suponer que sin hacer alguna variacion en las condiciones de la propuesta puedan ya encontrarse.

Si por exemplo fuese $a = 100$ leguas; $b = 2$ leguas; $c = 3$ leguas; $d = 40$ horas; seria $cd = 120$ leguas; y el punto C estaria á 20 leguas de distancia del punto B, y á su izquierda. Sustituyendo estos valores en la fórmula, resultará:

$$x = \frac{100 \times 2 - 2 \times 3 \times 40}{2 + 3} = \frac{200 - 240}{5} = \frac{-40}{5} = -8.$$

Por decontado esto nos indica que la qüestion contiene condiciones incompatibles, y que no es posible resolverla en los términos en que se nos ha propuesto: indica ademas que es susceptible de cierta modificacion por medio de la qual se formará otra qüestion en que entren las mismas cantidades conocidas, y cuyo resultado sea que los correos deban encontrarse en un punto R situado á la izquierda del punto B, y á 8 leguas de distancia de este; en una palabra, situado entre los puntos B y C, sin embargo de que á primera vista parezca que hallándose en C el correo procedente de M quando el otro salió de B, no se podrán reunir sino en un punto situado á la izquierda de C.

Para venir en conocimiento de la nueva qüestion, y de la modificacion que debemos hacer en la anterior, representemos por $-m$ el valor negativo que nos ha resultado para la incógnita, es decir, para el camino andado por el correo procedente de B hasta encontrar al otro. Sustituyamos aquel valor en lugar de la x en la

equacion, haciendo para ello uso de las reglas de los signos; y así tendrémos esta equacion verdadera y sin absurdo alguno:

$$-\frac{m}{b}=\frac{a-cd+m}{c};$$

de la qual, mudando los signos en ambos miembros, resultará estotra:

$$\frac{m}{b}=\frac{cd-a-m}{c};$$

y como el numerador de la segunda fraccion representa el camino andado por el correo procedente de *M*, desde que se hallaba en el nuevo punto de partida *C* hasta el punto del encuentro, es claro que este punto debe hallarse á la derecha de *C*, puesto que el minuendo cd es mayor que el sustraendo $a+m$. Tambien es claro que el mismo punto se halla á la izquierda de *B*, puesto que $a+m$ es lo que se debe restar de cd para que resulte el camino andado por el correo procedente de *M*. Ni lo uno ni lo otro puede verificarse sin que el correo procedente de *B* se haya dirigido hácia *C* y no hácia *M*; y sin que el correo procedente de *M*, despues de haber llegado á *C*, haya retrocedido hácia *B*. Este retroceso, que puede parecer muy extraordinario, es indispensable en el supuesto de que los correos se hayan de reunir caminando en sentidos opuestos; de lo contrario, ó no se reunirían, ó no se verificaria esta reunion caminando los dos correos en sentidos contrarios.

He aquí pues la nueva qüestion, ó sea la anterior modificada en términos que no contenga absurdo alguno, y que sea posible su solucion:

C R B M

Salió de M *un correo caminando 3 leguas por horas*

y habiendo corrido por espacio de 40 horas y llegado al punto C, retrocedió. Al tiempo en que empezó á retroceder, salió de otro punto B situado en la misma carrera y distante 100 leguas de M otro correo caminando 2 leguas por hora, y dirigiéndose hácia C. Se pregunta, *¿á qué distancia del punto B se encontraron los dos correos?*

Si nos propusiéramos resolver directa é inmediatamente esta qüestion, hallaríamos por resultado final que

$$x = 8 \text{ leguas}.$$

76 El problema del §. 56, generalizado se puede proponer en estos términos:

Un artesano y un hijo suyo trabajaron en una obra, el primero por espacio de a *dias, y el segundo por espacio de* b *dias, é importaron los jornales de ambos* c *reales; volviéron á trabajar en la misma obra, el primero por espacio de* d *dias, y el segundo por el de* e *dias, é importaron los jornales de entrambos* f *reales.* Se pregunta *¿quántos reales ganaba cada uno de los dos por dia?*

Representemos, como antes, por x el jornal del padre; y en a dias habrá ganado ax;
por y el jornal del hijo; y en b dias habrá ganado by.

Así que tendrémos esta primera equacion:

$$ax + by = c.$$

Del mismo modo, los jornales del padre en d dias importarán dx; y los del hijo en e dias serán ey. Tendrémos pues esta segunda equacion:

$$dx + ey = f;$$

y he ahí las dos equaciones fundamentales del problema.

De la primera equacion se deduce que

$$x = \frac{c - by}{a},$$

y multiplicando por d esta expresion del valor de x será $dx = \frac{cd - bdy}{a}$. Sustituyendo ahora esta última expresion en la segunda equacion fundamental, se transformará esta en estotra:

$$\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$$

Multiplicando por a todos los términos de la equacion, tendrémos:

$$cd - bdy + aey = af;$$

de donde deduciremos:

$$aey - bdy = af - cd;$$

$$y\,(ae - bd) = af - cd;$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Pudiendo ya mirar como enteramente conocido el valor de y, lo sustituirémos en la expresion que antes hallamos del de x, y se transformará esta en la siguiente:

$$x = \frac{c - b \times \frac{af - cd}{ae - bd}}{a},$$

la qual podrémos tambien mirar como enteramente conocida.

A fin de simplificar la última expresion efectuarémos en primer lugar la multiplicacion indicada de las cantidades

$$b \text{ y } \frac{af - cd}{ae - bd} \quad (\text{§. } 51);$$

cuyo producto es $\frac{abf - bcd}{ae - bd}$; y de consiguiente será

$$y = \frac{c - \frac{abf - bcd}{ae - bd}}{a}.$$

Reduciendo á quebrado el entero y quebrado que forman el numerador ó dividendo de esta expresion, se convertirá en estotra:

$$x = \frac{\frac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}}{a},$$

y reduciendo términos semejantes;

$$x = \frac{\frac{ace - abf}{ae - bd}}{a}.\ 1$$

1 Si alguno tuviese duda sobre el significado de estas expresiones, tenga presente que en la fórmula $x = \frac{A}{B}$ el numerador A representa al dividendo, y el denominador B al divisor, y así el uno como el otro pueden ser números enteros, quebrados ó mixtos. En esta atencion $x = \frac{\frac{M}{N}}{D}$ significa que x es igual al quociente que debe resultar de la division del quebrado $\frac{M}{N}$ por D, y de consiguiente equivale á $\frac{M}{DN}$. La fórmula $x = \frac{M}{\frac{N}{D}}$ quiere decir que x es igual al quociente que debe resultar de la division de la cantidad M por la fraccion $\frac{N}{D}$, y de consiguiente equivale á $\frac{MD}{N}$. La fórmula $x = \frac{\frac{M}{F}}{\frac{N}{D}}$ significa que la x es igual al quociente que debe resultar de la division del quebrado $\frac{M}{F}$ por el quebrado $\frac{N}{D}$, y de consiguiente equivale á $\frac{MD}{FN}$; y así de otras varias expresiones. Las que hemos descifrado pueden bastar para dar á conocer lo mucho que importa colocar las líneas de division segun sea el resultado que nos propongamos indicar.

Efectuando la division por a, resultará:

$$x = \frac{ace - abf}{a^2e - abd};$$

y suprimiendo el factor a comun al numerador y al denominador (§. 38), tendrémos por último:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Luego que hayamos hallado las fórmulas generales

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}; \qquad y = \frac{af - cd}{ae - bd};$$

podrémos aplicarlas á la solucion de todos los problemas particulares semejantes al propuesto, sustituyendo en lugar de cada letra el número representado por ella, y efectuando las operaciones indicadas; segun ya lo hicimos (§. 14) en una equacion que tenia una sola incógnita.

En efecto, si hacemos

$$a = 12;\ b = 7;\ c = 222;$$
$$d = 8;\ e = 5;\ f = 150;$$

y efectuamos las operaciones que estan indicadas en la fórmula, resultarán los valores particulares que hemos hallado en el §. 56.

Y si hacemos

$$a = 12;\ b = 7;\ c = 138;$$
$$d = 8;\ e = 5;\ f = 90;$$

en efectuando las operaciones indicadas, hallarémos el mismo resultado que en el §. 58.

77 Las equaciones fundamentales

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

pueden representar las de todos los problemas que pueden resolverse por medio de dos equaciones del primer

grado que contengan dos incógnitas; y las fórmulas que por resultado final hemos hallado para expresar los valores de x y de y, pueden aplicarse á quantos problemas puedan ocurrir de esta clase; con tal que se consideren las letras a, b, d, e como símbolos de las cantidades conocidas que multipliquen respectivamente á las incógnitas despues que se hayan traspuesto al primer miembro todos los términos en que estas se hallen; y las letras c y f como símbolos de todos los términos enteramente conocidos, despues de traspuestos al segundo miembro.

Asimismo lo que hemos practicado para deducir de las dos equaciones fundamentales propuestas las fórmulas finales, se puede tambien mirar como un modelo de lo que deberémos executar en todos los casos semejantes; lo qual se reduce en suma á que *en una de las equaciones se despeja una de las dos incógnitas; de este modo se obtiene una expresion de su valor, la qual sustituida en la otra equacion, hace que esta no tenga mas de una incógnita, y que ya entonces se le puedan aplicar las reglas establecidas* (§§. 10 y sig.)

Por último harémos las dos advertencias siguientes:

1.ª No son suficientes dos equaciones qualesquiera para determinar los valores de otras tantas incógnitas que haya en ellas; es necesario que una equacion no esté deducida de la otra, pues de lo contrario equivaldrán las dos á una sola. Así que las equaciones

$$2x+3y=12$$
$$4x+6y=24$$

no son reputadas por dos sino en la apariencia; pero en realidad se reducen á una sola, porque en multiplicando por 2 los miembros de la primera resulta la segun-

da; y en tomando la mitad de los miembros de esta resulta la primera. Téngase pues entendido que en quantos casos hablemos de qualquier número de equaciones, suponemos que son realmente distintas é independientes las unas de las otras.

Es necesario ademas que las dos equaciones no sean entre sí contradictorias ó incompatibles. Si, por exemplo, se deducen de la propuesta de un problema estas dos equaciones;

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 6y = 20$$

es muy fácil echar de ver que estas dos equaciones no pueden de modo alguno verificarse á un mismo tiempo, y que de consiguiente la qüestion que así lo requiere es enteramente absurda.

2.ª Quando en mas de dos equaciones independientes no haya mas de dos incógnitas, las equaciones que haya ademas serán supérfluas en caso que las condiciones expresadas en ellas sean compatibles con las contenidas en las otras dos; pero si fueren incompatibles, será imposible la solucion del problema. Así que, si de la traduccion algebráica de la propuesta de una qüestion resultasen estas tres equaciones:

$$2x + 3y = 22$$
$$3x + 2y = 23$$
$$4x + 5y = 40,$$

una de ellas será supérflua; porque en habiendo determinado por medio de qualesquiera dos de ellas los valores de las dos incógnitas, estos valores satisfacen á la tercera. Pero con solo variar qualquiera de los términos de una de ellas vendria á ser imposible la solucion del problema.

De la resolucion de tres ó mas equaciones que contengan igual número de incógnitas.

78 Quando la propuesta de una qüestion contiene explícita ó implícitamente tantas condiciones distintas quantas sean las cantidades incógnitas cuyos valores nos propongamos averiguar, cada una de las condiciones se traduce, como ya hemos visto, á una equacion algebráica. La qüestion en tal caso se llama *determinada*, porque se pueden determinar con certeza los valores de las cantidades desconocidas; pero como en cada una de las equaciones pueden y suelen con freqüencia estar mezcladas muchas incógnitas, el primer paso que debemos dar para resolver tales equaciones es deducir de todas ellas una que no contenga mas de una incógnita. *Siempre que en ninguna de las equaciones fundamentales haya mas potencia de las incógnitas que la primera, es fácil deducir de qualquiera de las equaciones una expresion del valor de qualquiera de las incógnitas; y sustituyendo esta expresion en todas las demas equaciones, las que de nuevo resulten tendrán ya una incógnita menos. Repitiendo en estas nuevas equaciones el mismo procedimiento, obtendrémos al cabo una equacion, en la qual no habrá mas de una sola incógnita.*

Esta operacion, por medio de la qual hacemos, por decirlo así, desaparecer de las equaciones una ó mas incógnitas, se llama *eliminacion*. Con su auxílio deducimos de tres equaciones que tienen tres incógnitas dos equaciones que contengan solo dos incógnitas: de las dos nuevas equaciones deducimos por último una que no contiene mas de una incógnita; y determinado el valor

de esta, determinamos fácilmente los de todas las otras. Del mismo modo de quatro equaciones con quatro incógnitas deducimos tres equaciones con una incógnita menos; de estas tres deducimos dos con otra incógnita menos; y últimamente de estas dos deducimos una con una sola incógnita; y determinado el valor de esta se determinan fácilmente los de todas las demas. Lo mismo puede decirse de qualquier otro número de equaciones que contengan igual número de incógnitas que se hallen todas en primera potencia.

Propongámonos ya una qüestion que nos conduzca á tres equaciones con tres incógnitas.

79 *Uno ha comprado el trigo, la cebada y el centeno que en tres viages han conducido unos arrieros. En el primer viage fueron 30 las fanegas de centeno, 20 las de cebada, y 10 las de trigo, é importaron todas 2300 reales. En el segundo fueron 15 las fanegas de centeno, 6 las de cebada, y 12 las de trigo; y á los mismos precios que las del primer viage importaron 1380 reales. En el tercer viage fueron 10 las fanegas de centeno, 5 las de cebada, y 4 las de trigo; y á los mismos precios que las anteriores importaron 750 reales.* Se pregunta: *¿á como costó cada fanega de centeno, cada fanega de cebada, y cada una de trigo?*

Representemos por x el número de reales, precio de cada fanega de centeno;

por y el de cada fanega de cebada;

por z el de cada fanega de trigo;

y de consiguiente el valor total de 30 fanegas de centeno será $30x$;

el de 20 fanegas de cebada será $20y$;

el de 10 fanegas de trigo será $10z$.

Y como la suma de estas tres cantidades deba ser, con arreglo á la primera condicion del problema, igual á 2300 reales, tendrémos esta primera equacion:

$$30x + 20y + 10z = 2300.$$

Asimismo el valor total

de 15 fanegas de centeno será $15x$;
de 6 fanegas de cebada será $6y$;
de 12 fanegas de trigo será $12z$;

y traduciendo al lenguage algebráico la segunda condicion, resultará estotra equacion:

$$15x + 6y + 12z = 1380.$$

Por último el valor total

de 10 fanegas de centeno será $10x$;
de 5 fanegas de cebada será $5y$;
de 4 fanegas de trigo será $4z$;

y la traduccion algebráica de la tercera condicion del problema será esta equacion:

$$10x + 5y + 4z = 750.$$

Tendrémos pues fielmente traducida al lenguage algebráico la qüestion que se nos ha propuesto, en las tres equaciones siguientes:

$$30x + 20y + 10z = 2300$$
$$15x + 6y + 12z = 1380$$
$$10x + 5y + 4z = 750.$$

Antes de emprender la resolucion de estas equaciones, veamos si son susceptibles de alguna simplificacion; exâminemos si los dos miembros de alguna ó de algunas de ellas son divisibles por un mismo número (§. 12); y verémos que los de la primera son ambos exâctamente divisibles por 10, y los de la segunda por 3. Efectuemos estas dos divisiones, y podrémos sustituir en lugar de aquellas tres equaciones estotras:

$$3x+2y+z=230;$$
$$5x+2y+4z=460;$$
$$10x+5y+4z=750.$$

Estando á nuestro arbitrio elegir la equacion que mejor nos parezca para deducir de ella una expresion del valor de qualquiera de las incógnitas, deduzcamos de la primera equacion una expresion del valor de z; pues no teniendo esta incógnita coeficiente en aquella equacion, la expresion de su valor resultará sin divisor, y por tanto será mas fácil sustituirla en las demas equaciones. De la primera, pues, se deduce que

$$z=230-3x-2y;$$

y sustituyendo esta expresion en las otras dos, se transformarán en estotras:

$$5x+2y+920-12x-8y=460;$$
$$10x+5y+920-12x-8y=750.$$

Reduciendo, trasponiendo, y mudando los signos, tendrémos:

$$7x+6y=460;$$
$$2x+3y=170.$$

Ya que hemos eliminado la z, y que las equaciones estan reducidas á dos con dos incógnitas, deducirémos de la primera la expresion que de ella resulta para el valor de y, la qual será:

$$y=\frac{460-7x}{6};$$

y sustituyéndola en la otra equacion se transformará esta en la siguiente:

$$2x+3\times\frac{460-7x}{6}=170;$$

la qual viene á ser esta:

$$2x+\frac{460-7x}{2}=170.$$

Habiendo ya eliminado dos de las tres incógnitas y obtenido una equacion con una sola incógnita, nos será fácil determinar el valor de esta por medio de las reglas establecidas (§§. 10 y sig.). En efecto, de la última equacion se deducen estotras:

$$4x+460-7x=340$$
$$4x-7x=340-460$$
$$7x-4x=460-340$$
$$3x=120$$
$$x=\frac{120}{3}=40.$$

Sustituyendo este valor de la x en la expresion que antes hemos hallado del de y, se transformará esta en las que siguen:

$$y=\frac{460-7\times 40}{6}=\frac{460-280}{6}=\frac{180}{6}=30.$$

Finalmente, sustituyendo los valores que ya hemos determinado de x é y en la expresion que al principio hallamos del de z, se transformará esta en estotra:

$$z=230-3\times 40-2\times 30=230-180=50.$$

Costó pues cada fanega de centeno 40 reales;
cada fanega de cebada 30 reales;
y cada fanega de trigo 50 reales.

Este exemplo puede servir de modelo para resolver otras tres qualesquiera equaciones del primer grado con tres incógnitas; y por otra parte merecen tenerse presentes las abreviaciones y reducciones que en él hemos executado, para otros muchísimos casos en que podrémos efectuarlas.

80 Del mismo modo resolverémos el problema siguiente:

Se obligó uno á transportar una partida de loza, en la qual habia piezas de tres distintos tamaños, con

la condicion de que por cada pieza que se quebrase pagaria tantos reales como hubiera cobrado por el porte si la hubiese entregado sana.

Se le entregaron primeramente dos piezas pequeñas, quatro medianas y nueve grandes; quebró todas las medianas; y despues de descontar del porte de las otras lo que debia pagar por las quebradas percibió 56 reales.

Despues se le entregaron siete piezas pequeñas, tres medianas y cinco grandes; quebró todas las grandes; y por el porte de las otras, despues de hecho el descuento correspondiente, percibió solos 6 reales.

Por último se le entregaron nueve piezas pequeñas, diez medianas y once grandes; quebró todas estas once, y por este viage percibió 8 reales.

Se pregunta: *¿quánto llevaba por el porte de cada una de las piezas?*

Representemos por x el número de reales, porte de cada pieza pequeña;

por y el de cada pieza mediana;
por z el de cada pieza grande.

Y puesto que la cantidad percibida por el conductor ha sido, con arreglo á la contrata, la diferencia entre lo que hubiera cobrado por las piezas que ha entregado sanas, y lo que debia pagar por las quebradas, las tres condiciones de la qüestion, traducidas al lenguage algebráico, se transformarán en las equaciones siguientes:

$$2x-4y+9z=56;$$
$$7x+3y-5z=6;$$
$$9x+10y-11z=8.$$

De la primera de estas equaciones se deduce que

$$x=\frac{56+4y-9z}{2};$$

y sustituyendo esta expresion en las otras dos equaciones, se transforman en estotras:

$$\frac{392+28y-63z}{2}+3y-5z=6;$$

$$\frac{504+36y-81z}{2}+10y-11z=8.$$

Multiplicando por 2 todos los términos de ambas equaciones, producirán estotras:

$$392+28y-63z+6y-10z=12;$$
$$504+36y-81z+20y-22z=16.$$

Reduciendo y trasponiendo términos, y mudando los signos, tendrémos las siguientes:

$$73z-34y=380$$
$$103z-56y=488.$$

De la primera de estas se deduce que

$$y=\frac{73z-380}{34};$$

y sustituyendo esta expresion en la segunda, se transformará en estotra:

$$103z-56\times\frac{73z-380}{34}=488.$$

Multiplicando por 34 los términos de esta, producirá la que sigue:

$$34\times 103z-56\times 73z+56\times 380=34\times 488.$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, resultará esta:

$$3502z-4088z+21280=16592;$$

de la qual se deducen estotras:

$$3502z-4088z=16592-21280$$
$$4088z-3502z=21280-16592$$
$$586z=4688$$
$$z=\frac{4688}{586}=8.$$

Sustituyendo ahora este valor ya conocido en la expresion que antes hallamos del de y, se transformará esta en las siguientes:

$$y = \frac{584 - 380}{34} = \frac{204}{34} = 6.$$

Ultimamente, sustituyendo los valores, que ya conocemos, de x é y en la expresion que al principio deduximos del de x, tendrémos estotra:

$$x = \frac{56 + 24 - 72}{2} = \frac{80 - 72}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Se ajustó pues el porte de cada pieza pequeña en 4 reales;

el de cada pieza mediana en 6 reales;

y el de cada pieza grande en 8 reales.

Estos exemplos pueden bastar para hacer ver lo que deberá practicarse en todos los demas casos.

81 Muchas veces sucede que no se hallan todas las incógnitas en todas las equaciones fundamentales de la qüestion; pero no por eso dexarémos de resolverlas por el mismo método. Es verdad que en tales casos no será tan arbitrario el deducir de qualquiera de las equaciones la expresion del valor de qualquiera de las incógnitas, sino que será necesario elegir una incógnita comun á dos ó mas equaciones para poder pasar de unas á otras.

Sean por exemplo las quatro equaciones

$$3u - 2y = 2$$
$$2x + 3y = 39$$
$$5x - 7z = 11$$
$$4y + 3z = 41$$

en las quales se hallan, como se ve, las quatro incógnitas u, x, y, z.

Exâminando con alguna atencion estas equaciones,

se ve fácilmente que deduciendo de la segunda una expresion del valor de x, y sustituyéndola en la tercera, resultará una nueva equacion que solo contendrá las incógnitas y, z. Por medio de esta nueva equacion y de la última de las propuestas se determinarán los valores de z y de y. Luego que esten conocidos estos valores se les sustituirá en las dos primeras equaciones, y se determinarán los de u y de x. Con arreglo á este plan de operaciones harémos el cálculo siguiente:

$$x = \frac{39 - 3y}{2};$$

$$5 \times \frac{39 - 3y}{2} - 7z = 11;$$

$$195 - 15y - 14z = 22$$

Nueva equacion: $15y + 14z = 173;$

que combinada con: $4y + 3z = 41;$

dará por resultado final

$$y = 5;\ z = 7.$$

Estando ya conocidos estos valores, será fácil transformar la expresion del valor de x en estotra:

$$x = \frac{39 - 15}{2} = \frac{24}{2} = 12;$$

y la expresion del valor de u que se deduce de la primera equacion, á saber:

$$u = \frac{2 + 2y}{3}$$

se transformará, por medio de la sustitucion, en estotra:

$$u = \frac{2 + 10}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Son pues los quatro números que se buscaban,

4, 12, 5 y 7.

82 Aunque no hayamos aplicado el método expuesto para la eliminacion á otras equaciones que las numéricas, bien se dexa conocer que se le podria igualmente aplicar á las literales; pero es necesario confesar que en pasando de dos las equaciones y las incógnitas, el gran número de letras que es menester emplear para representar de un modo general las cantidades que se suponen conocidas, hacen algo embarazoso el cálculo; y de ahí es que los algebristas, despues de presentar con la mayor sencillez que es posible las equaciones fundamentales, se han empeñado en descubrir, y efectivamente han descubierto medios de deducir inmediatamente de ellas las fórmulas finales sin necesidad de repetir toda la serie de operaciones que el método anteriormente expuesto prescribe. En el capítulo siguiente darémos alguna idea de lo que mas importa saber sobre esta materia; entretanto concluirémos este reuniendo varias qüestiones, cuyas soluciones indicarémos, con el fin de que los principiantes se exerciten en ponerlas en equacion y en resolverlas.

1.ª *Uno á quien se preguntó quántos años tenia un hijo suyo, respondió: si del doble de su actual edad se quita el triple de la que tenia 6 años ha, resultará el número de años que en el dia tiene.*

Respuesta: *el hijo tiene ahora 9 años.*

2.ª *Diofanto, autor del libro mas antiguo que conocemos de Algebra, pasó en su niñez la sexta parte de toda su vida; una duodecima ó dozava parte en su adolecencia, y entonces se casó; despues de haber estado casado 5 años mas de la séptima parte de su vida, tuvo un hijo, el qual murió á la mitad de la edad que llegó á cumplir el padre; y 4 años despues de la muerte*

de aquel falleció este. Se pregunta: *¿quántos años tenia Diofanto al tiempo de su fallecimiento?*

Respuesta: *84 años.*

3.ª Un comerciante separa al principio de cada año, de los fondos que maneja, 3000 pesos para los gastos de su casa; y sin embargo, por haber logrado ganar en cada año la tercera parte del resto, con el qual ha negociado, ha duplicado al cabo de tres años el capital que al principio tenia. Se pregunta: *¿quánto era este capital primitivo?*

Respuesta: *44400 pesos.*

4.ª Dispuso uno en su testamento que de su caudal se diesen al mayor de sus hijos 1000 pesos y la décima parte de todo lo restante; que al hijo segundo se diesen 2000 pesos y la décima parte de lo que restase; al tercero 3000 pesos y la décima parte de lo que hubiese quedado despues de hechas todas las anteriores deducciones; y que por el mismo órden se fuese distribuyendo la herencia entre todos los demas hijos. Cumplida que fue esta disposicion, se halló que todas las porciones eran iguales. Se pregunta: *¿á quántos pesos ascendia toda la herencia; quántos eran los hijos; y quánta la porcion que correspondió á cada uno?*

Respuesta: *la herencia total ascendia á 81000 pesos; los hijos eran 9; y á cada uno tocaron 9000 pesos.*

Observ. Es digno de notarse en esta qüestion el que sin embargo de ser tres las cantidades desconocidas, se la puede resolver con una sola equacion, porque representando qualquiera de las incógnitas por una letra, no es necesario emplear letras distintas para representar las otras dos, en vista de la mutua relacion que la propuesta establece entre ellas. Bien es verdad que si el

número de los hijos fuese la incógnita que elijamos para designarla con una letra, la equacion, aunque fácil de resolver, no será ya de primer grado. Esto dará alguna idea de la importancia de hacer en tales casos una eleccion acertada de la que determinemos mirar como principal incógnita.

5.ª *Un mercader tiene dos clases de té; la una de á 42 reales la libra, y la otra de á 54 reales la libra; y quiere saber quántas libras deberá tomar de cada clase para componer 100 libras, cuyo valor total sea 5040 reales?*

Respuesta: *30 libras de la primera clase, y 70 de la segunda.*

Observ. Esta es una de las qüestiones que los aritméticos llaman de *aligacion simple.* Véase la nota puesta al fin del §. 174 de la Aritmética.

6.ª *Se ha llenado de agua en 12 minutos una vasija de 39 azumbres de cabida, habiéndola expuesto primeramente á un caño que arrojaba 3 azumbres de agua en cada minuto, y despues á otro que arrojaba 4 azumbres en cada minuto.* Se pregunta: *¿quántos minutos estuvo expuesta á cada uno de los caños?*

Respuesta: *9 minutos al primero, y 3 al segundo.*

7.ª *Siendo en un relox las doce en punto, y estando por consiguiente el minutero sobre el índice de las horas,* se pregunta: *¿qué hora será quando vuelvan á reunirse los dos índices?*

Respuesta: *la 1.ª y $5\frac{5}{11}$ minutos.*

Observ. Este problema es análogo al del §. 65.

8.ª *Queriendo uno distribuir los quartos que tenia entre varios pobres, vió que le faltaban 10 quartos para dar á cada pobre 25; y que dando á cada uno*

20 quartos, le sobraban 25. Se pregunta: *¿quántos quartos tenia, y quántos eran los pobres?*

Respuesta: *los quartos eran 165, y los pobres 7.*

9.ª *Tres hermanos han tenido que asociarse para comprar una finca apreciada en 200000 reales; porque al primero le faltaba para poder comprarla por sí solo la mitad del dinero que el segundo tenia; á este le faltaba la tercera parte del dinero que tenia el primero; y al tercero la quarta parte de la misma cantidad del primero.* Se pregunta: *¿á quántos reales ascendia el dinero de cada uno?*

Respuesta: *el primero tenia 120000 reales; el segundo 160000 reales; y el tercero 170000 reales.*

10.ª *Se pusiéron tres á jugar, y en la primera mano el primero y el segundo ganáron al tercero tantos reales como cada uno de aquellos dos habia sacado para jugar; en la segunda mano ganáron el primero y el tercero al segundo tantos reales como cada uno de aquellos dos tenia despues de la primera mano; en la tercera ganáron el segundo y el tercero al primero tantos reales como cada uno de los dos tenia despues de la segunda mano; y concluida la tercera, tenia cada uno de los tres 120 reales.* Se pregunta: *¿con quántos reales se puso á jugar cada uno?*

Respuesta: *el primero con 60 reales;*
el segundo con 105 reales;
y el tercero con 195 reales.

Fórmulas generales para la resolucion de las equaciones del primer grado.

83 Para precaver el inconveniente de que hemos hablado al principio del §. anterior han ideado en primer lugar los algebristas

el representar con una misma letra todos los coeficientes que una misma incógnita puede tener en las diferentes equaciones fundamentales de una misma qüestion; y para dar á entender que la misma letra representa distintas cantidades, marcan con un acento las que pertenecen á la segunda equacion; con dos acentos las de la tercera, con tres las de la quarta; y así de las demas.

Las dos equaciones generales, por exemplo, que contienen dos incógnitas, se representan de este modo:

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c';$$

en las quales los coeficientes de la incógnita x estan designados por la letra a; los de la y por b; la cantidad enteramente conocida por c; y para que no se crea que las cantidades representadas por estas letras en una equacion son precisamente iguales á las de la otra, tienen un acento la a, la b y la c de la segunda. Por manera que a' no representa la misma cantidad que a, sino otro coeficiente de la misma incógnita x; b' no designa la misma cantidad que b, sino otro coeficiente de la misma incógnita y.

Tres equaciones con tres incógnitas y pertenecientes á un mismo problema se representan generalmente de este modo:

$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$

en las quales los coeficientes de la x estan representados por la letra a; los coeficientes de la y por b; los de la z por c; los términos enteramente conocidos por d; y los acentos puestos á estas letras nos indican que no son precisamente iguales las tres cantidades designadas por cada una de ellas. Así que a, a', a'' son símbolos de cantidades distintas, y que solo tienen de comun el ser todas tres coeficientes de una misma incógnita x. Lo mismo puede decirse de las otras letras que representan cantidades conocidas.

Con arreglo al mismo sistema quatro equaciones con otras tantas incógnitas, y pertenecientes á una misma qüestion, se representarán con la mayor sencillez y generalidad del modo siguiente:

$$ax + by + cz + du = e;$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = e';$$
$$a''x + b''y + c''z + d''u = e'';$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = e''';$$

y por el mismo órden se podrán representar qualquier número de equaciones que contengan igual número de incógnitas, y pertenezcan á un mismo problema.

84 Deduzcamos ahora de estas equaciones generales las fórmulas ó últimas expresiones de los valores de las incógnitas; y para evitar en la eliminacion la sustitucion de expresiones fraccionarias, hagamos que tenga un mismo coeficiente en todas las equaciones la incógnita que nos propongamos eliminar, observando para ello un método análogo al que hemos seguido para hacer que tuviesen un mismo denominador muchos quebrados.

Comencemos por las dos equaciones generales:

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c';$$

de las quales se eliminaria fácilmente la x, por exemplo, si esta incógnita tuviera un mismo coeficiente en ambas equaciones; pues en tal caso bastaria, para conseguirlo, restar una equacion de otra. Esto se puede hacer mas perceptible en las equaciones numéricas:

$$10x + 11y = 27$$
$$10x + 9y = 15$$

de las quales, restando de la primera la segunda, se deduce estotra:

$$11y - 9y = 27 - 15$$
$$\text{ó } 2y = 12;\ \text{ó } y = 6.$$

Para hacer pues uso de este mismo expediente en las equaciones generales, es necesario prepararlas de modo que tenga en ambas un mismo coeficiente la incógnita x que de ellas queremos eliminar; y para conseguir esta preparacion bastará multiplicar los dos miembros de la primera equacion por el coeficiente a' que la x tiene en la segunda; y los dos miembros de esta por el coeficiente a que la misma x tiene en la primera. De este modo se transformarán las equaciones propuestas

$$ax + by = c;$$
$$a'x + b'y = c';$$

en estotras:

$$aa'x + a'by = a'c$$
$$aa'x + ab'y = ac'.$$

Restando ahora de la segunda la primera, resultará esta:

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c;$$

de la qual, no habiendo ya mas incógnita que la y, se deduce que

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Si hubiésemos multiplicado los dos miembros de la primera equacion por el coeficiente b' que la incógnita y tiene en la segunda, y los dos miembros de esta por el coeficiente b que la misma incógnita tiene en la primera, la hubiéramos eliminado por medio de la sustraccion, y hubiéramos hallado que

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Este método de eliminar qualquiera incógnita es aplicable á qualquier número de equaciones del primer grado. Aplicándolo á las tres equaciones generales con tres incógnitas,

$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$

multiplicarémos, para eliminar la x, los dos miembros de la primera equacion por el producto $a'a''$ de los dos coeficientes que aquella incógnita tiene en las equaciones segunda y tercera; los dos miembros de la segunda por el producto aa'' de los coeficientes de la misma incógnita en la primera y la tercera; últimamente los dos miembros de la tercera por el producto aa' de los coeficientes que tiene en la primera y la segunda. Teniendo ya entonces la x un mismo coeficiente $aa'a''$ en todas tres equaciones, restarémos sucesivamente una de ellas de las otras dos; y los residuos serán dos equaciones, que solo contendrán la y y la z.

Del mismo modo eliminarémos de estas dos equaciones la y, y el resultado será una equacion que no contendrá mas incógnita que la z, y será fácil deducir de ella la expresion final del valor de esta incógnita; pero es de advertir que esta expresion, que como bien se

dexa conocer, será fraccionaria, tendrá un factor comun á los dos términos de la fraccion, y de consiguiente no será la mas sencilla que pudiera haberse obtenido.

85 Debemos á *Bezout* un método muy sencillo para deducir inmediatamente de qualquier número de equaciones del primer grado que contengan igual número de incógnitas, una equacion que no tenga mas de una incógnita, y de la qual por consiguiente se hayan eliminado á un mismo tiempo todas las demas; y aunque las ventajas de este método no sean enteramente perceptibles sino quando pasan de dos las equaciones, lo darémos á conocer comenzando por este número de ellas para hacer ver su generalidad.

Sean, pues, las dos equaciones:

$$ax+by=c$$

$$a'x+b'y=c';$$

y multiplicando una de ellas, la primera, por una cantidad indeterminada m se transformará en esta:

$$amx+bmy=cm;$$

y restando de esta última la segunda de las propuestas, resultará:

$$amx-a'x+bmy-b'y=cm-c';$$

$$\text{ó } (am-a')x+(bm-b')y=cm-c'.$$

Y puesto que siendo indeterminada la cantidad m está enteramente á nuestro arbitrio atribuirle el valor que mas nos acomode, podrémos suponer que sea tal que $bm=b'$; en cuyo caso, haciéndose igual á *cero* el coeficiente que la y tiene en la última equacion, quedará eliminada esta incógnita, y permaneciendo la x sola se deducirá fácilmente que

$$x=\frac{cm-c'}{am-a'}.$$

Reflexîonando ahora que el suponer $bm=b'$ equivale á hacer $m=\frac{b'}{b}$; si sustituimos en vez de m esta fraccion en la expresion que hemos hallado del valor de x, se transformará en estotra:

$$x=\frac{c\frac{b'}{b}-c'}{a\frac{b'}{b}-a'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Si en vez de suponer $bm = b'$ hubiésemos supuesto $am = a'$ se habria eliminado la x; y quedando la y sola hubiéramos deducido que

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'};$$

y como esta nueva suposicion equivalga á haber hecho $m = \frac{a'}{a}$, sustituyendo esta fraccion en la expresion que hemos hallado del valor de la y, resultará:

$$y = \frac{c\frac{a'}{a} - c'}{b\frac{a'}{a} - b'} = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'};$$

Si quisiéremos que la expresion del valor de y tenga el mismo denominador que la de x, mudarémos los signos del numerador y del denominador de aquella; lo qual nos es permitido hacer siempre que nos acomode, porque equivale á multiplicar por -1 los dos términos de la fraccion. Así tendrémos:

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

86 Propongámonos ahora las tres equaciones generales del primer grado

$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$

y ya la analogía nos conducirá á multiplicar dos qualesquiera de ellas, la primera y la segunda, respectivamente por dos cantidades indeterminadas m y n; á sumar las dos nuevas equaciones, y á restar de esta suma la tercera de las propuestas. En la expresion de este residuo entran todas tres equaciones, y de consiguiente todas las incógnitas; pero estando á nuestro arbitrio dar á las indeterminadas m y n los valores que nos acomoden, podrán estos ser tales que á un mismo tiempo desaparezcan de aquel resultado dos incógnitas. Efectuando las operaciones que acabamos de indicar, y reuniendo del modo que es posible en un solo término todos los que en la expresion del residuo pertenezcan á una misma incógnita, tendrémos:

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.$$

Si ahora queremos eliminar á un mismo tiempo la x y la y, supondrémos, como nos es permitido:

$$am + a'n = a''$$
$$bm + b'n = b'';$$

y quedando entonces la z sola, se deducirá fácilmente que

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''}.$$

Solo falta sustituir en esta expresion los valores que correspondan á m y á n, los quales se deben deducir de las dos equaciones que, usando de la absoluta facultad que teníamos, supusimos, á saber:

$$am + a'n = a'',$$
$$bm + b'n = b'';$$

las quales vienen á ser dos equaciones con las dos incógnitas m y n. Si pues cotejamos estas dos equaciones con las generales que hemos resuelto en el párrafo anterior, resultará del cotejo que los símbolos de las incógnitas, que antes eran x é y, han venido á ser respectivamente m y n; y los símbolos de las cantidades conocidas que antes eran

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \end{matrix}\right\} \text{ han venido á ser } \left\{\begin{matrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b''. \end{matrix}\right.$$

Con que sustituyendo en las fórmulas que antes hemos hallado, los nuevos símbolos en lugar de los anteriores, resultarán estotras expresiones:

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'};$$
$$n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la que poco antes hemos hallado del valor de z, se transformará en la que sigue:

$$z = \frac{d(a''b' - b''a') + d'(ab'' - ba'') - d''(ab' - ba')}{c(a''b' - b''a') + c'(ab'' - ba'') - c''(ab' - ba')}.$$

Del mismo modo podemos eliminar la x y la z, y dexar la y sola, suponiendo para determinar la m y la n estas dos equaciones:

$$am + a'n = a''; \qquad cm + c'n = c'';$$

y efectuando la misma serie de operaciones que antes, hallarémos que

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') + d'(ac'' - ca'') - d''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}.$$

Ultimamente; para eliminar la y y la z, y dexar la x sola, supondrémos:

$$bm + b'n = b''; \quad cm + c'n = c'';$$

y efectuando las mismas operaciones, resultará:

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb'') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}.$$

Ordenando los términos de las tres fórmulas que hemos hallado, de modo que sean alternativamente positivos y negativos; colocando los factores de cada término segun el órden de los acentos; y mudando los signos del numerador y denominador de las expresiones de la z y la x para que todas tres tengan un denominador comun, resultarán estas:

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''};$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''};$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

87 Sean las quatro equaciones generales:

$$ax + by + cz + du = e$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = e'$$
$$a''x + b''y + c''z + d''u = e''$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + du''' = e''';$$

y multiplicarémos la primera por m; la segunda por n; la tercera por p; sumarémos las tres que de nuevo resulten; y de la suma restarémos la quarta. La expresion del residuo, ordenada como las de los anteriores, será la siguiente:

$$(am + a'n + a''p - a''')\,x + (bm + b'n + b''p - b''')\,y + \ldots\ldots$$
$$(cm + c'n + c''p - c''')\,z + (dm + d'n + d''p - a''')\,u = \ldots\ldots$$
$$em + e'n + e''p - e'''.$$

Para eliminar á un mismo tiempo las tres incógnitas x, y, z, y determinar el valor de la u, supondrémos las tres equaciones que siguen:

$$am + a'n + a''p = a'''$$
$$bm + b'n + b''p = b'''$$
$$cm + c'n + c''p = c''';$$

y de este modo resultará:

$$u = \frac{em + e'n + e''p - e'''}{dm + d'n + d''p - d'''}.$$

De las tres equaciones supuestas se deducirán, con el auxîlio de las fórmulas del §. anterior, los valores de m, n, p; y se les sustituirá en la expresion que acabamos de hallar del valor de u. Del mismo modo hallarémos las fórmulas respectivas á la z, á la y y á la x.

En vista de la generalidad, sencillez y comodidad de este método, apenas habria cosa alguna que añadir á lo expuesto, si luego que se han hallado las primeras fórmulas, y que se ha observado el órden que todos sus términos guardan en su composicion, no se hubiese descubierto un medio aun mas sencillo para hallar qualquiera que necesitemos de ellas.

88 Con el fin de darlo mejor á conocer, comencemos por la equacion $ax = b$

de la qual se deduce $x = \frac{b}{a}$;

en cuya expresion se ve que el numerador es el término enteramente conocido, y el denominador el coeficiente de la incógnita.

De las dos equaciones generales

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

se han deducido las fórmulas igualmente generales

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

en las quales se puede facilmente observar que en el denominador no entran mas cantidades que los coeficientes de las incógnitas combinados de un modo tan sencillo, que basta invertir el órden de los factores del producto ab, anteponer el signo $-$ al producto ba que de aquella inversion resulta, y marcar con un acento la segunda letra ó factor de aquellos dos productos; y he ahí formado el denominador $ab' - ba'$.

Por lo que hace al numerador, es fácil echar de ver que el respectivo á la x no se diferencia del denominador sino en que la c ocupa el lugar de la a; y el respectivo á la y no se diferencia del de-

nominador sino en que la c ocupa el lugar de la b; por manera que así en uno como en otro numerador ocupa la c el lugar que en el denominador comun corresponde al coeficiente de la incógnita, cuyo valor intentemos expresar. Del denominador comun $ab' - ba'$ se deduce pues el numerador $cb' - bc'$ para el valor de la x; y el numerador $ac' - ca'$ para el valor de la y. De consiguiente así en el caso de dos incógnitas como en el de una sola *se deduce del denominador el numerador, poniendo el término enteramente conocido en lugar del coeficiente de la incógnita cuyo valor se busque, y conservando los acentos segun esten en el denominador.*

Basta dar una ojeada á las fórmulas que han resultado de las tres equaciones con tres incógnitas, para ver observada en todas ellas la misma regla; por manera que toda la dificultad queda reducida á formar el denominador. Para la formacion de este tendrémos presente que en el caso de las dos incógnitas se hacian todas las permutaciones posibles con los coeficientes a y b; y esta observacion nos inducirá á pensar que quando las incógnitas sean tres, el denominador se compondrá de todas las permutaciones posibles de los tres coeficientes a, b, c. Formemos pues estas permutaciones del modo siguiente:

Teniendo ya formadas las permutaciones $ab - ba$ de dos coeficientes, escribamos á continuacion de la primera ab el tercer coeficiente c, y así tendrémos la combinacion abc; y haciendo que la c ocupe sucesivamente todos los lugares en la combinacion, sin invertir el órden que en ella guardan las letras a y b; y mudando el signo á cada nueva permutacion que resulte tendrémos:

$$abc - acb + cab.$$

Executemos lo mismo con la segunda permutacion de las dos letras $-ba$, y resultarán estotras: $-bac + bca - cba$.

Reuniendo estos tres productos á los tres anteriores, y marcando con un acento la segunda letra de cada producto, y la tercera con dos, resultará:

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'';$$

que es cabalmente el denominador comun de las fórmulas que hemos deducido de las tres equaciones generales con tres incógnitas.

Del mismo modo se formaria el denominador en el caso de ha-

ber quatro equaciones con otras tantas incógnitas, introduciendo la letra d en cada uno de los seis productos

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

y haciendo que vaya sucesivamente ocupando todos los lugares, y alternando los signos. Por manera que el primer término abc deberá producir los quatro siguientes:

$$abcd - abdc + adbc - dabc.$$

Executando lo mismo con los otros cinco productos, y marcando la segunda letra con un acento, la tercera con dos, y la quarta con tres, tendrémos los 24 términos de que se compondrá el denominador; y de este se deducirán los quatro numeradores por la regla establecida anteriormente.[1]

89 Para aplicar las fórmulas que hemos hallado á la resolucion de las equaciones numéricas, es necesario cotejar qualquiera que se nos proponga de estas, con las generales que hemos resuelto en los párrafos anteriores. Por medio de este cotejo vendrémos en conocimiento del valor que en aquel caso particular corresponda á cada uno de los símbolos a, b, c &c.; y sustituyendo estos valores en las fórmulas, resultarán los de las incógnitas.

Si por exemplo nos propusiésemos resolver las tres equaciones

$$7x + 5y + 2z = 79$$
$$8x + 7y + 9z = 122$$
$$x + 4y + 5z = 55,$$

las compararíamos con las generales (§. 86), y del cotejo resultaria que en este caso

$$a = 7;\ b = 5;\ c = 2;\ d = 79;$$
$$a' = 8;\ b' = 7;\ c' = 9;\ d' = 122;$$
$$a'' = 1;\ b'' = 4;\ c'' = 5;\ d'' = 55.$$

Sustituyendo estos números en las fórmulas ó expresiones generales de los valores de las tres incógnitas, y efectuando las operaciones que estan indicadas en ellas, hallarémos que

$$x = 4;\ y = 9;\ z = 3.$$

Conviene tener entendido que las mismas fórmulas pueden ser-

1 *Laplace* ha demostrado *à priori* estas reglas en la segunda parte de las Memorias de la Academia de Ciencias año de 1772, pág. 294.

vir para determinar los valores de las incógnitas, aun quando no todos los términos de las equaciones numéricas que se nos propongan tengan el signo +, como á primera vista puede parecer que lo exîgen las equaciones generales, de donde se han deducido aquellas expresiones. Lo único que en faltando aquella condicion se requiere ademas, es tener muy presentes las reglas de los signos para determinar el que corresponda á cada uno de los términos que entren en la expresion del valor de cada incógnita; puesto que aplicamos una fórmula calculada para ciertas y determinadas circunstancias á un caso en que ya estas no se verifican.

Si por exemplo se nos propusiesen las equaciones

$$3x - 9y + 8z = 41;$$
$$-5x + 4y + 2z = -20,$$
$$11x - 7y - 6z = 37;$$

cotejándolas con las generales veríamos que

$$a = 3;\ b = -9;\ c = 8;\ d = 41;$$
$$a' = -5;\ b' = 4;\ c' = 2;\ d' = -20;$$
$$a'' = 11;\ b'' = -7;\ c'' = -6;\ d'' = 37.$$

Ahora, al tiempo de hacer la sustitucion de estos valores verémos que siendo el primer término del denominador, por exemplo, $ab'c''$ vendrá á ser en este caso $+3 \times +4 \times -6$; y de consiguiente el producto será -72. Efectuando lo mismo con todos los demas términos así de los numeradores como del denominador; sumando por una parte todos los términos aditivos, y por otra todos los sustractivos; y últimamente restando la suma de los unos de la de los otros, resultará:

$$x = \frac{2774 - 2834}{592 - 622} = \frac{2834 - 2774}{622 - 592} = \frac{60}{30} = 2;$$

$$y = \frac{3022 - 2932}{592 - 622} = \frac{2932 - 3022}{622 - 592} = \frac{-90}{30} = -3;$$

$$z = \frac{3859 - 3889}{592 - 622} = \frac{3889 - 3859}{622 - 592} = \frac{30}{30} = 1.$$

De las equaciones de segundo grado con una sola incógnita.

90 En las equaciones que hasta aquí hemos resuelto no estaban las incógnitas multiplicadas unas por otras, ni elevadas á otra potencia mas alta que la primera; por cuya razon se las llama del *primer grado*: pero si nos propusiéramos *hallar un número que multiplicado por su quíntuplo produxese* 125, en representando el número incognito por x, su quíntuplo sería $5x$, y tendríamos esta equacion:

$$5x^2=125;$$

la qual se llama del *segundo grado*, porque contiene la segunda potencia x^2 de la incógnita. Si dividiendo por 5 los dos miembros de la equacion despejamos aquella segunda potencia, resultará

$$x^2=25.$$

Para deducir ahora de esta equacion el valor de la incógnita son necesarios otros medios que los indicados (§. 11); pues tenemos que hallar un número que multiplicado, como dicen, por sí mismo produzca 25, y para esto no son suficientes aquellos medios. Es verdad que basta un poco de atencion para echar de ver que el número que buscamos es 5; pero como muy pocas veces se podrá descubrir con tanta facilidad el número que satisfaga á cada una de las innumerables equaciones de esta clase que pueden presentársenos, será muy conveniente prescribir un método general para dar solucion á esta nueva qüestion numérica: *hallar un número que multiplicado por sí mismo produzca otro número dado*, ó lo que viene á ser lo mismo, *retroceder de la segunda*

potencia al número que la ha producido, y que se llama su *raiz quadrada*. En habiendo resuelto esta question general, tendrémos un medio seguro para determinar los valores de las incógnitas en todas las equaciones de segundo grado.

91 El método que vamos á exponer para hallar, ó como se dice, para *extraer la raiz quadrada* de qualquier número, supone que se tengan de antemano conocidos los quadrados ó las segundas potencias de todos los números dígitos; por cuya razon creemos conveniente poner aquí la siguiente tabla:

Raices......	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados.	1	4	9	16	25	36	49	64	81

en la qual vemos que la segunda potencia de un número representado por una sola cifra no puede estar representado por mas de dos. Por otra parte sabemos que 10, es decir, el número mas pequeño de todos los que pueden representarse por una combinacion de dos cifras, tiene ya tres en su quadrado 100; que el quadrado de 20 es 400; el de 30 es 900; el de 40 es 1600; y generalmente que el quadrado de qualquier número representado por una sola cifra significativa con uno ó mas ceros á su derecha tiene por decontado las mismas cifras significativas que si la de la raiz estuviese enteramente sola, y ademas un número de ceros doble del que la raiz tenga.

Quando la raiz esté representada por dos ó mas cifras significativas, convendrá observar quánto influye el valor de cada una de ellas en el de todo el quadrado;

pues tratándose como se trata de la descomposicion de la segunda potencia, debe sernos sumamente útil averiguar cómo se la compone. Indaguémos pues con este objeto qué influxo tiene en la composicion cada una de las partes de un número representado por dos cifras significativas; y sea este, por exemplo, 47.

Las dos cifras con que está representado el número propuesto nos lo presentan como equivalente á un binomio $a+b$, cuya primera parte a es 4 *decenas*, y la segunda b es 7 *unidades*. Y habiendo demostrado en el exemplo segundo del §. 34 que el quadrado del binomio $a+b$ es $a^2+2ab+b^2$; inferirémos que el quadrado del número propuesto, ó de otro qualquiera compuesto de decenas y unidades, contendrá las tres partes siguientes: primera, *el quadrado de las decenas*: segunda, *dos veces el producto de las decenas por las unidades*: tercera, *el quadrado de las unidades*.

Así que en la composicion del quadrado de 47 deberán entrar las tres siguientes partidas:

$$a^2 = 40 \times 40 = 1600$$
$$2ab = 80 \times 7 = 560$$
$$b^2 = 7 \times 7 = 49$$
$$\text{Total.....}\ a^2+2ab+b^2 = 2209.$$

Si ahora queremos retroceder del número 2209 á su raiz 47, observarémos en primer lugar que el quadrado 1600 de las decenas no tiene cifra alguna significativa de un órden inferior al de las centenas, y que 16 centenas es el mayor quadrado contenido en las 22 centenas del número 2209; puesto que 22 se halla entre 16 y 25, es decir, entre el quadrado de 4 y el de 5, así como 47 se halla entre 4 decenas ó 40 unidades, y 5 decenas ó 50 unidades.

Por consiguiente viendo que el mayor quadrado contenido en las 22 *centenas* es 16 *centenas*, y que la raiz quadrada de 16 *oentenas* es 4 *decenas*, inferirémos que la raiz del número 2209 no puede tener mayor número de *decenas* que 4. Si despues quitamos del número propuesto el quadrado 16 *centenas* ó 1600 *unidades*, el residuo 609 deberá contener el doble producto de las decenas por las unidades, y el quadrado de las unidades de la raiz. Y como la primera de estas dos últimas partidas no contenga unidades de órden inferior al de las decenas, es claro que deberá hallarse en el número 60 representado por las primeras cifras del residuo 609; bien que en aquellas 60 *decenas* estarán tambien las procedentes del quadrado de las unidades absolutas de la raiz. Si, pues, dividimos aquellas 60 *decenas* por 8 *decenas*, doble de las 4 que antes hemos hallado, el quociente 7 será el número de las unidades absolutas de la raiz; porque multiplicando por 7 las 8 *decenas*, y restando del número 609 las 56 *decenas* ó 560 *unidades*, quedan de residuo 49, que justamente es el quadrado de las 7 unidades.

Despues de haber expuesto los principios en que se funda esta operacion, la efectuarémos del modo siguiente:

Quadrado 22,09	47...... Raiz quadrada.
16	87
60,9	
609	
000	

Se escribe el número propuesto como si tratasemos de dividirlo por otro, destinando á su raiz el lugar que

deberia ocupar el divisor. En seguida se separan con una coma las dos cifras de unidades y decenas para considerar solamente el número representado por las dos primeras cifras de la izquierda, que debe contener el quadrado de las decenas de la raiz. Se busca el mayor quadrado 16 contenido en aquel número; se pone la raiz 4 en el lugar que le está destinado; y se resta su quadrado 16 de 22. Al lado del residuo 6 se baxan las otras dos cifras 09 del número propuesto; se separa la última, porque no pertenece al doble producto de las decenas por las unidades; se divide la parte restante á la izquierda por 8, duplo de las decenas de la raiz; y así resultan por quociente 7 unidades. Para formar ahora á un mismo tiempo las dos últimas partes del quadrado que deben hallarse en 609, se escribe 7 á la derecha de 8, por cuyo medio resulta el número 87, igual al duplo de las decenas mas las unidades, y representado generalmente por $2a+b$, el qual multiplicado por 7 ó por b reproduce $609=2ab+b^2$, ó el duplo de las decenas multiplicadas por las unidades, mas el quadrado de las unidades. Efectuando la sustraccion no queda residuo alguno; y así venimos en conocimiento de que se ha finalizado la operacion, y de que 47 es la raiz quadrada de 2209.

Si nos propusiéramos ahora extraer la raiz quadrada de 324, dispondríamos la operacion de este modo:

Quadrado........	3,24	18. .... Raiz quadrada.
	1	28
	22,4	
	22 4	
	00 0	

é imitando quanto hemos practicado en el exemplo anterior hallaríamos que 1 es la cifra de las decenas, ó la primera parte de la raiz. Siendo el quadrado de 1 decena 1 centena, restarémos esta de las 3 que hay en el número propuesto, y á la derecha del residuo 2 centenas pondrémos las 24 unidades; con lo qual tendrémos el número 224. Dividirémos por el duplo 2 de la 1 decena que hemos hallado, el número 22 representado por las dos primeras cifras de 224. Ahora bien, 22 contiene al 2 once veces; y la segunda parte que buscamos de la raiz no solo no puede llegar á 10, sino que en este caso debe ser menor que 9, porque escribiendo 9 á la derecha de 2, y multiplicando 29 por 9 como prescribe la regla, hallaríamos por resultado 261, que no se puede restar de 224. No debemos pues mirar la division del 22 por 2 sino solamente como un medio aproxîmativo de hallar las unidades; y será preciso disminuir el quociente hallado hasta que resulte un producto que no exceda al 224; condicion que se verifica en el número 8, puesto que 8 multiplicado por 28 es igual á 224. Haciendo pues la sustraccion no queda residuo alguno; y esto nos indica que la raiz que buscamos es 18.

Formando las tres partes del quadrado de 18 hallarémos:

$$a^2 = 100$$
$$2ab = 160$$
$$b^2 = 64$$

Total...... $324 = 18 \times 18$;

por cuyo medio vemos que las 6 decenas que contiene el quadrado de las unidades, reunidas á las 16 del doble producto de las decenas por las unidades, alteran este producto en términos que la division de las 22 decenas

por el duplo de la decena de la raiz, no puede ya dar exâctamente las unidades de esta.

92 En vista de lo que hemos practicado en los exemplos anteriores no puede ya ofrecer dificultad alguna la extraccion de la raiz quadrada de un número representado por tres ó quatro cifras; mas para poner al lector en estado de extraer la raiz de un número representado por quantas cifras se quieran, son todavía necesarios ciertos pormenores que fácilmente se deducen de los principios establecidos.

Miéntras no llegue á 100 un número, su quadrado no podrá estar representado por mas de quatro cifras, puesto que el quadrado de 100 es 10000, que es el número menor de quantos se pueden representar por una combinacion de cinco cifras; pero todo número que pase de 100 y no llegue á 1000, habrá de tener en su quadrado mas de quatro y menos de siete cifras. Esto supuesto, para exâminar la formacion del quadrado de un número mayor que 100 y menor que 1000, de 473 por exemplo, se podrá descomponer este número en 470 + 3 ó en 47 decenas mas 3 unidades; y para deducir su quadrado de la fórmula

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

haremos $a = 47$ decenas $= 470$ unidades; $b = 3$ unidades; y así tendrémos:

$$\begin{aligned} a^2 &= 220900 \\ 2ab &= \quad 2820 \\ b^2 &= \qquad\ 9 \end{aligned}$$

$$\text{Total......}\ 223729 = 473 \times 473;$$

en cuyo exemplo se ve que el quadrado de las 47 decenas no tiene cifras significativas de un órden inferior á

las centenas, como debe ser en general; puesto que decenas multiplicadas por decenas producen siempre centenas.

Debemos pues buscar el quadrado de las decenas en la parte 2237 que queda á la izquierda del número propuesto despues de haber separado las decenas y las unidades; y como 473 está entre 47 decenas ó 470 y 48 decenas ó 480, es consiguiente que 2237 sea mayor que el quadrado de 47 y menor que el de 48. De donde se sigue que el mayor quadrado contenido en 2237 será el de 47 ó el de las decenas de la raiz. Para hallar el mayor quadrado contenido en 2237 procederémos como si intentásemos extraer la raiz quadrada de aquel número; pero deberémos tener entendido que en vez de llegar á un resultado exâcto, quedará un residuo, que contendrá las centenas procedentes del doble producto de las 47 decenas multiplicadas por las unidades.

Para efectuar el cálculo se dispone la operacion del modo siguiente:

Quadrado........	22,37,29	473....... Raiz.
	16	87
	63,7	943
	60 9	
	282,9	
	287,9	
	0	

Se separan primeramente las dos últimas cifras 29; y para extraer la raiz del número 2237 que queda á la izquierda, se separan del mismo modo las dos últimas cifras 37 de este número; y de esta manera se halla dividida la combinacion de cifras del número propuesto

en porciones ó secciones de á dos cifras empezando por la derecha. Se executan con las dos primeras secciones de la izquierda las mismas operaciones que se han hecho en el exemplo anterior con el número 2209; por cuyo medio obtendrémos las dos primeras cifras 47 de la raiz; bien que resulta un residuo 28, el qual combinado con la última seccion 29 nos presentará el número 2829 que debe contener al doble producto de las 47 decenas por las unidades y el quadrado de las unidades. Separemos la cifra 9 que no forma parte del doble producto de las decenas por las unidades, y dividamos 282 por 94, duplo de las 47 decenas; escribamos el quociente 3 inmediatamente á la derecha de 94; multipliquemos 943 por 3; restemos del 2829 el producto; y puesto que no resulta residuo alguno, estará concluida la operacion.

93 Para manifestar las operaciones que se han de executar con otro número qualquiera, nos propondrémos extraer la raiz de 22391824. Sea qual fuere esta raiz, la podrémos considerar como compuesta de decenas y de unidades, lo mismo que en los exemplos antecedentes; y como el quadrado de las decenas no debe contener ninguna cifra significativa de órden inferior á las centenas, no podrán entrar en él las dos últimas cifras 24. Separémoslas pues, y vendrá á parar la qüestion en buscar el mayor quadrado contenido en la parte 223918 que queda á la izquierda. En atencion á que esta parte se compone de mas de dos cifras, es necesario concluir que el número que exprese las decenas de la raiz que se busca, se ha de representar por mas de una cifra, y por consiguiente se le puede mirar tambien como compuesto de decenas y unidades. Al quadrado de

estas segundas decenas no pueden pertenecer las dos últimas cifras 18 de la parte 223918, sino solo las restantes 2239, que quedan á la izquierda; y puesto que el número 2239 está representado por quatro cifras, la raiz del mayor quadrado contenido en él, se representará por dos cifras: tendrá pues decenas y unidades; y no debiendo pertenecer al quadrado de estas últimas decenas las dos cifras 39 de la derecha, será necesario buscar en el 22 el quadrado del número de unidades de órden superior que puede haber en la raiz pedida. Por esta serie de raciocinios, que se puede continuar al infinito, resultará dividida la combinacion de cifras del número propuesto en secciones de á dos cifras de derecha á izquierda; bien que podrá muy bien suceder, y freqüentemente sucede, que en la última seccion de la izquierda quede tan solo una cifra.

Dividida así la combinacion de cifras del número propuesto en secciones; y dispuesto como aquí lo presentamos, se hacen con las tres primeras secciones las mismas operaciones que hemos executado en el exemplo del párrafo anterior; y quando se han hallado las tres primeras cifras 473, se baxa la quarta seccion 24 á la derecha del residuo 189; se considera el número 18924 como que contiene al doble producto de las 473 decenas por las unidades que buscamos, y al quadrado de estas unidades; se separa la última cifra 4, que no pertenece á aquel doble producto; se divide el número 1892 que

22,39,18,24	4732
16	
63,9	87
60 9	943
301,8	9462
282 9	
1892,4	
1892 4	
00000	

queda á la izquierda por 946, duplo de 463; y se hace en seguida la comprobacion del quociente 2 del mismo modo que en las operaciones precedentes.

Con esto hemos terminado la operacion; pero se ve claramente que si hubiese aun otra seccion, las quatro cifras halladas 4732 representarian el número de las decenas de una raiz cuyas unidades tendríamos aun que buscar; y por consiguiente seria necesario dividir el residuo que nos quedase, combinado con la primera cifra de la seccion siguiente, por el duplo de aquellas decenas. Del mismo modo continuaríamos la operacion si aun quedasen otras nuevas secciones de cifras que poder baxar.

94 Es necesario advertir que si despues de haber baxado alguna seccion, el residuo precedente, combinado con la primera cifra de ella no contuviese al duplo del número representado por las cifras que hasta entonces hayamos hallado de la raiz, deberémos poner á continuacion de estas un *cero*, porque en este caso la raiz no tendrá unidades de este órden; y baxarémos en seguida la seccion siguiente para continuar la operacion comó de ordinario. El siguiente exemplo presenta ya executado lo que acabamos de prescribir; bien entendido que en él hemos efectuado las sustracciones sin escribir los sustraendos, é imitando lo que hemos practicado en la division (*Aritm.* §. 46).

49,42,09	703
04,20,9	1403
0000	

95 La tabla que hemos puesto (§. 90) de los quadrados de los números dígitos nos hace venir en conocimiento de que exîsten muchos números comprehendidos entre dos quadrados inmediatos, y que de consiguiente no tienen raiz exâcta: 45, por exemplo, no es

un quadrado, puesto que se halla entre 36 y 49. No serán, pues, quadrados perfectos, ó lo que es lo mismo, no tendrán raiz quadrada exâcta todos los números que se nos propongan, antes por el contrario las mas veces sucederá que el número cuya raiz se nos pida no la tendrá; pero efectuando con él las mismas operaciones que si la tuviese, el resultado será la raiz del mayor quadrado que en él esté contenido. Si se busca, por exemplo, la raiz de 2276, se hallará 47, quedando de residuo 67; lo qual manifiesta que el mayor quadrado contenido en 2276 es el de 47 ó 2209.

En estos casos en que despues de haber hallado la raiz del que creamos el mayor quadrado contenido en un número, quede algun residuo final, podrá ocurrir la duda de si habremos puesto en la raiz alguna parte menor de lo que debiera ser. Para salir de esta duda, y ver al mismo tiempo si el residuo final podrá desvanecerse, ó por lo menos disminuirse, tengamos presente que siendo el quadrado de $a+b$

$$a^2+2ab+b^2,$$

si hacemos $b=1$, el quadrado de $a+1$ será

$$a^2+2a+1.$$

Esta expresion, traducida nos viene á decir que si dos números qualesquiera representados por a y $a+1$ se diferencian en una sola unidad, el quadrado del mayor contendrá el quadrado del menor, mas el doble de este, mas la unidad. De consiguiente, para que debamos añadir una unidad á la raiz que hayamos hallado, es indispensable que el residuo que haya resultado contenga por lo menos el doble de la raiz hallada, y ademas una unidad. Siempre que no se verifique esta circunstancia, la raiz hallada será efectivamente la del ma-

yor quadrado contenido en el número propuesto.

96 Supuesto que para multiplicar una fraccion por otra es necesario multiplicar los numeradores entre sí, y los denominadores tambien entre sí, es evidente que el producto de una fraccion multiplicada por sí misma, *ó el quadrado de una fraccion es igual al quadrado de su numerador dividido por el quadrado de su denominador*. De aquí se sigue que *para extraer la raiz quadrada de una fraccion es necesario extraer la de su numerador y la de su denominador*. Así que, la raiz de $\frac{25}{64}$ es $\frac{5}{8}$, porque 5 es la raiz quadrada de 25, y 8 la de 64.

Conviene observar que qualquier potencia de un quebrado propio no solo es otro quebrado propio, sino que tambien este quebrado debe ser tanto menor que su raiz, quanto mas elevado sea el grado de la potencia. Tambien es muy importante notar que no solamente los quadrados de las fracciones propias son siempre fracciones, sino que tambien todo quebrado impropio que no sea exâctamente reducible á entero, multiplicado por sí mismo dará siempre un resultado fraccionario igualmente irreducible. Lo qual equivale á decir que *el quadrado de qualquier número mixto debe necesariamente ser otro número mixto, y jamas puede ser un número puramente entero.*

97 Esta proposicion está fundada en esta otra: *Todo número primo* P *que sea divisor exâcto del producto* AB *de dos números enteros qualesquiera* A y B, *ha de ser necesariamente divisor exâcto de alguno de los dos factores, quando no lo sea de entrambos.*

Supongamos que sea B mayor que P sin ser exâctamente divisible por P; representemos por Q el número entero que en tal caso formará parte del quociente $\frac{B}{P}$; y designemos por B' el residuo fi-

nal de la division; con lo qual vendrá á ser:

$$B = PQ + B' \text{ (Aritm. (§. 51)},$$

de donde deducirémos: $AB = APQ + AB'$;
y dividiendo los dos miembros de esta equacion por P, tendrémos esta otra:

$$\frac{AB}{P} = AQ + \frac{AB'}{P};$$

la qual hace ver que siendo, como se supone, exâctamente divisible por P el producto AB, y no siéndolo el factor B, debe necesariamente serlo el producto AB'. Pero siendo B' el residuo de la division de B por P, es necesariamente menor que P: y así no podrá dividirse B' por P.

Ya que por esta razon no es posible dividir á B' por P, supongamos efectuada la division de P por B'; representemos por Q' al número entero que deberá resultar en el quociente de esta division, y por B'' al residuo. Supongamos asimismo efectuada la division del mismo número P por el residuo B''; representemos al entero del quociente por Q'', y al residuo por B'''. Continuemos dividiendo siempre el mismo número P por el residuo que haya resultado en la division inmediata anterior; y sabiendo, como sabemos, por una parte que P es un número *primo*, y por otra que los residuos han de ir disminuyendo mas y mas hasta llegar á uno que sea igual á la unidad y de consiguiente divisor exâcto de P; si suponemos que este último residuo sea B^{IV}, tendrémos esta serie de equaciones:

$$P = Q'B' + B''; \; P = Q''B'' + B'''; \; P = Q'''B''' + B^{IV} = Q'''B''' + 1.$$

Multiplicando los miembros de estas equaciones por A, resultarán estotras:

$$AP = Q'AB' + AB''; \; AP = Q''AB'' + AB'''; \; AP = Q'''AB''' + A.$$

Dividiendo por P los miembros de estas equaciones, resultarán estotras:

$$A = Q'\frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P}; \; A = Q''\frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}; \; A = Q'''\frac{AB'''}{P} + \frac{A}{P}.$$

Ahora bien, ya hemos hecho ver que para ser P divisor exâcto de AB sin serlo de B, era absolutamente necesario que lo fuese del producto AB'; y de consiguiente podemos mirar como demostrado que $\frac{AB'}{P}$ representa un número entero. No podrá, pues, verificarse

la primera de las tres últimas equaciones sin que $\frac{AB''}{P}$ sea un número entero; y siéndolo, no podrá verificarse la segunda equacion sin que sea número entero el quociente $\frac{AB'''}{P}$; y entonces no podrá verificarse la última equacion sin que A sea exâctamente divisible por P.

Es, pues, visto que todo número primo que sea divisor exâcto de otro número compuesto, ha de ser indispensablemente divisor exâcto de alguno, por lo menos, de los factores de este; y por la inversa, si un número primo no fuere divisor exâcto de ninguno de los factores de un producto, de ningun modo podrá serlo del mismo producto. [1]

98 Ahora bien, quando la fraccion $\frac{b}{a}$ es irreducible, no hay número *primo* alguno que pueda dividir exâctamente sus dos términos b y a; y como por lo que acabamos de demostrar todo número *primo* que no sea divisor exâcto de a, tampoco puede serlo del producto aa ó a^2; y todo número *primo* que no sea divisor exâcto de b, tampoco puede serlo de $b \times b$ ó b^2; es consiguiente que la fraccion $\frac{b^2}{a^2}$ sea tan irreducible como $\frac{b}{a}$.

99 De esta última proposicion se deduce fácilmente que como la raiz exâcta de un número entero no sea otro número entero, tampoco podrá ser número mixto, ó lo que es equivalente, no hay número alguno que multiplicado por sí mismo dé por producto alguno de los números enteros comprehendidos entre dos quadrados inmediatos. Sin embargo, sea qual fuere el número que se nos proponga, nos podemos imaginar que ha resultado de la multiplicacion de alguna otra cantidad por

1 De este principio dimos ya alguna idea en la Aritmética (§. 99). La demostracion que de él acabamos de dar es sustancialmente la misma que *Legendre* ha dado en su *Teoría de los números*.

sí misma; y aunque en muchas ocasiones nos será imposible determinarla exâctamente, podrémos á lo menos aproxîmarnos á ella quanto queramos.

Supongamos por exemplo que se nos haya propuesto el número 2276, cuya raiz quadrada está comprehendida entre 47 y 48, porque 47 × 47 da un producto menor que aquel número, y 48×48 lo da mayor. Si pues suponemos dividido por medio de quebrados el intervalo que se halla entre 47 y 48, podremos hallar quantos números queramos que multiplicados por sí mismos den productos mayores que el quadrado de 47 y menores que el de 48, y que por consiguiente se vayan aproxîmando mas y mas al número 2276; bien que jamas hallarémos uno que multiplicado por sí mismo dé por producto 2276.

Así como la division da orígen á los quebrados, la extraccion de la raiz quadrada de los números que no son quadrados perfectos da orígen á otra nueva especie de cantidades; pero entre las fracciones y las raices de los números que no son quadrados perfectos hay la diferencia de que las fracciones se componen siempre de un número exâcto de partes de la unidad, y de consiguiente toda fraccion y la unidad tienen alguna *medida comun*, ó la misma razon que dos números enteros; lo qual no puede tener lugar en las raices de los números que no son quadrados perfectos.

Si suponemos que cada unidad esté dividida en 5 partes iguales, por exemplo, 9 de estas partes vendrán á ser el quociente de la division de 9 por 5 ó $\frac{9}{5}$; y puesto que $\frac{1}{5}$ está contenido 5 veces en la unidad y 9 veces en $\frac{9}{5}$, la medida comun de la unidad y de la fraccion $\frac{9}{5}$ será $\frac{1}{5}$, y la razon de la unidad al

quebrado $\frac{9}{5}$ será la de los números enteros 5 y 9.

En vista de que no solamente los números enteros sino tambien las fracciones tienen con la unidad una medida comun, se dice que estas cantidades son *comensurables* con la unidad, ó simplemente *comensurables;* y por quanto las razones de estas cantidades á la unidad se pueden expresar por otras de números enteros, así estos como las fracciones se designan tambien con el nombre comun de *cantidades racionales.*

Por el contrario la raiz quadrada de un número que no sea quadrado perfecto es *incomensurable* ó *irracional,* porque no pudiendo estar representada exâctamente por ninguna fraccion, es claro que, sea qual fuere el número de partes en que se suponga dividida la unidad, jamas las habrá tan pequeñas que una de ellas pueda ser medida comun exâcta de la raiz y de la unidad; ni por consiguiente será posible designar dos números que tengan entre sí la misma razon que la raiz incomensurable y la unidad.

Para indicar en general que se ha de extraer una raiz, y representar el resultado final de esta operacion, ora sea una cantidad comensurable, ora incomensurable, hacemos uso del signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical.* Así que

$\sqrt{16}$ es lo mismo que 4; y de consiguiente es una cantidad *comensurable;*

$\sqrt{2}$ es *incomensurable* ó *irracional.*

100 Aunque en realidad no es posible obtener una expresion exâcta de $\sqrt{2}$ en números enteros ni en mixtos, podemos sin embargo aproxîmarnos quanto quera-

mos á su verdadero valor, convirtiendo el número que está debaxo del radical en una fraccion cuyo denominador sea un quadrado; y tomando el número entero que mas se aproxîme á la raiz quadrada del numerador, tendrémos el de otro quebrado, cuyo denominador será la raiz quadrada del anterior denominador; y este nuevo quebrado será próxîmamente la raiz del número propuesto.

Convirtiendo, por exemplo, el número 2 en *veinticincavos*, tendrémos la expresion fraccionaria equivalente $\frac{50}{25}$, y puesto que 7 es el número entero que mas se aproxîma á $\sqrt{50}$; y 5 es exâctamente $\sqrt{25}$, el quebrado impropio $\frac{7}{5}$ ó el número mixto $1\frac{2}{5}$ será la raiz de 2 tan aproxîmada que no le falta ni $\frac{1}{5}$ de la unidad para ser exâcta.

101 Esta operacion está fundada en lo que hemos dicho en el §. 96, á saber, que el quadrado de qualquier fraccion es otra nueva fraccion, cuyo numerador es el quadrado del numerador primitivo, y cuyo denominador es el quadrado del denominador primitivo: y siendo este principio generalmente aplicable á toda especie de fracciones, se le podrá aplicar á las decimales con mas facilidad que á las demas. Por de contado, de este principio se sigue que el quadrado de qualquier número de *décimas* ha de ser un número de *centésimas*; que el quadrado de qualquier número de *centésimas* debe ser otro número de *diezmilésimas*, y así sucesivamente. Por manera que en los quadrados de las fracciones decimales el número de cifras es siempre doble del de la raiz. Esto mismo puede deducirse tambien de la regla establecida para la multiplicacion de las canti-

dades decimales; pues en ella se nos prescribe que el producto haya de tener tantas cifras decimales como tienen ambos factores. Si pues consideramos al quadrado como producto que es de su raiz multiplicada por sí misma, es claro que en el quadrado debe haber dos veces tantas cifras decimales como haya en la raiz.

De lo dicho es fácil inferir que si nos propusiéremos obtener la raiz quadrada de 227, por exemplo, tan aproxîmada que no le falte ni una centésima, deberémos convertir aquel número en el equivalente de *diezmilésimas* multiplicándolo por 10000, ó lo que es lo mismo, poniendo quatro ceros á su derecha; lo qual nos dará 2270000 *diezmilésimas*. Ahora extraerémos la raiz de este último número considerándolo como si fuese de unidades enteras; y para indicar que el resultado debe ser de *centésimas*, separarémos con una coma las dos últimas cifras de la derecha. De este modo hallarémos que la raiz de 227., con diferencia de menos de una centésima, es 15,06 segun puede verse en la operacion siguiente:

Quadrado...... 2,27,00,00	15,06.... Raiz.
12,7	25
2000,0	3006
1964	

Si el número propuesto tuviere de antemano cifras decimales, será necesario hacer que el número de estas sea par; pues segun hemos demostrado, para cada cifra decimal de la raiz debe haber dos en el quadrado. Por exemplo, para extraer la raiz de 51,7 pondrémos desde luego un cero á la derecha de este número para que tenga por lo menos centésimas; y extrayendo la raiz de

51,70 resultará próxîmamente 7,1. Si quisiéremos que esta raiz tenga mas decimales, ó lo que es lo mismo, resulte mas aproxîmada, pondrémos á la derecha del número 51,70 tantos pares de ceros como nuevas cifras haya de tener la raiz.

Los que deseen exercitarse en estas operaciones, podrán extraer las raices quadradas de los números 2 y 3 con siete cifras decimales; para lo qual tendrán que poner catorce ceros á la derecha de aquellas cifras significativas, y hallarán los resultados siguientes:

$$\sqrt{2}=1,4142136;\quad \sqrt{3}=1,7320508.$$

102 Quando hayamos hallado mas de la mitad del número de cifras que se desea en la raiz, podemos obtener las restantes por medio de la simple division. Si, por exemplo, nos proponemos extraer la raiz quadrada de 32976, aproxîmada hasta las centésimas, hallarémos primeramente por la regla general el número entero 181 que mas se le aproxîma; y ya que estan determinadas tres de las cinco cifras que ha de tener la raiz, hallarémos las dos cifras decimales que faltan, considerando al residuo 215 como si fuese el de una division ordinaria, en la qual 362, doble de la raiz hallada, fuera el divisor. Pondrémos pues dos ceros á la derecha del residuo; y dividiendo 21500 por 362, resultarán por quociente 59 centésimas, que agregadas á las 181 unidades darán 181,59; y esta será la raiz del número propuesto aproxîmada hasta las centésimas.

Para demostrar la legitimidad de este procedimiento designarémos por N el número propuesto; por a la parte que suponemos hallada de la raiz; por b la parte que falta para completarla; y estando representada por el binomio $a+b$ la raiz exâcta del número propuesto N, tendrémos esta equacion:

$$N=a^2+2ab+b^2;$$

de la qual se deducen estotras:

$$N-a^2=2ab+b^2;$$

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Esta última nos hace ver que en habiendo restado del número propuesto el quadrado de la parte que suponemos hallada de la raiz, si dividimos por el doble de esta parte el residuo, el quociente será siempre mayor que la otra parte b. Sin embargo, pueden ser tales las cantidades a y b, que sea despreciable la fraccion $\frac{b^2}{2a}$; y entonces la última equacion quedará reducida á

$$b = \frac{N - a^2}{2a}.$$

Por decontado en nuestro caso a representa un número de unidades de órden mas elevado que las de b; y tales que para reducir aquellas al mismo órden que estas, como es necesario para comparar dos cantidades, deberémos poner á la derecha de las cifras de a tantos ceros como cifras haya en b. Si pues suponemos que a tenga primitivamente mas cifras que b, en reduciendo estas cantidades á unidades de un mismo órden, vendrá la primera á tener mas de dos veces tantas cifras como tenga la segunda: y como el número de cifras de un quadrado no pueda ser mas del doble de las que haya en la raiz, es claro que a y con mas razon $2a$ tendrá mas cifras que b^2, y por tanto $\frac{b^2}{2a}$ será un quebrado propio de la unidad del ínfimo órden que haya en b.

Esto supuesto, quando nos hemos propuesto aproxîmar hasta las *centésimas* la raiz de un número, y hemos hallado en primer lugar la parte $a = 181$ unidades, vimos que para llegar al grado propuesto de aproxîmacion nos faltaba un número que se habia de representar con dos cifras. Supongamos que este número de centésimas sea 99, que es el mayor de su clase, y de consiguiente el menos favorable para nuestro intento. La parte a reducida á centésimas será 18100; $2a = 36200$; y $\frac{b^2}{2a}$ sería en tal caso $\frac{99 \times 99}{36200}$ $= \frac{9801}{36200}$ de una centésima. Es decir que aun en el caso menos favorable el error que puede resultar de este medio de abreviacion es menos de un tercio de una centésima; será pues menor en todas las demas circunstancias mas favorables. Así que, se podrá sin rezelo

tomar el quociente $\frac{N-a^2}{2a}$ por equivalente á b siempre que el número de cifras del quociente sea menor que el de las que haya en a.

103 Las mismas reflexîones que hemos hecho sobre la equacion $\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$, y que nos han conducido á la fórmula de aproxîmacion

$$b=\frac{N-a^2}{2a},$$

nos hacen ver un método de aproxîmar por medio de las fracciones ordinarias qualquiera raiz incomensurable. En efecto, despues de haber hallado el número entero a que mas se aproxîme á la raiz exâcta del número propuesto, la parte b que falta, debe ser un quebrado propio; $\frac{b^2}{2a}$ será otro quebrado mucho menor que b; de consiguiente será despreciable, y podrá mirarse como exâcta la fórmula

$$b=\frac{N-a^2}{2a}.$$

A fin de manifestar cómo pueda esta fórmula servirnos para aproxîmar quanto queramos la raiz repitiendo una misma operacion; propongámonos extraer la raiz quadrada de 2. Desde luego vemos que 1 es el entero que mas se aproxîma á esta raiz: y que $\frac{N-a^2}{2a}=\frac{1}{2}$. Si pues suponemos que sea $b=\frac{1}{2}$, la raiz aproxîmada del número propuesto será $1\frac{1}{2}$ ó $\frac{3}{2}$. Haciendo ahora $a=\frac{3}{2}$, será $\frac{N-a^2}{2a}=-\frac{1}{12}$; y suponiendo que sea $b=-\frac{1}{12}$, la raiz mas aproxîmada será $\frac{3}{2}-\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$. Haciendo de nuevo $a=\frac{17}{12}$, será $\frac{N-a^2}{2a}=-\frac{1}{408}$: y suponiendo que sea $b=-\frac{1}{408}$, la raiz aun mas aproxîmada será $\frac{17}{12}-\frac{1}{408}=$

$\frac{577}{408}$. Del mismo modo podrá continuar sin término la aproxîmacion, designando por a la raiz que se haya acabado de hallar, y suponiendo que sea $b = \frac{N - a^2}{2a}$ *.

104 Para aproxîmar la raiz quadrada de una fraccion cuyos términos no sean quadrados perfectos, el primer medio que se nos presenta es extraer aproxîmadamente la raiz del numerador y la del denominador; pero reflexîonando un poco, echarémos de ver que puede en todos casos ser exâcta una de estas dos raices haciendo que uno de los términos de la fraccion, por exemplo el denominador, sea un quadrado perfecto: lo qual se consigue multiplicando los dos términos de la fraccion propuesta por su denominador. Si tuviéremos, por exemplo, que extraer la raiz quadrada de $\frac{3}{7}$, transformarémos esta fraccion en

$$\frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{21}{49}$$

multiplicando sus dos términos por el denominador 7; y siendo 4 el número entero que mas se aproxîma á la raiz de 21, será $\frac{4}{7}$ la raiz de $\frac{3}{7}$, aproxîmada de modo que para ser exâcta no le falta ni $\frac{1}{7}$.

Si deseáremos mayor aproxîmacion, será necesario convertir, por lo menos aproxîmadamente, la fraccion

* En el complemento de este tratado darémos otras fórmulas generales mas cómodas para aproxîmar quanto se quiera las raices incomensurables de qualquier grado que sean.

propuesta $\frac{3}{7}$ en otra cuyo denominador sea el quadrado de un número mayor que 7.

Si querémos, por exemplo, que la raiz se diferencie de la verdadera en menos de $\frac{1}{15}$, transformarémos $\frac{3}{7}$ en el número equivalente de *docientosveinticincavos*, es decir, en otro quebrado cuyo denominador sea el quadrado de 15. De este modo tendrémos (*Aritm.* §. 98 *en la nota*) el quebrado $\frac{96}{225}$, que se diferencia de $\frac{3}{7}$ en menos de $\frac{1}{225}$; y puesto que la raiz de $\frac{96}{225}$ se halla entre $\frac{9}{15}$ y $\frac{10}{15}$, aproxîmándose mas á esta segunda fraccion que á la primera por estar 96 mas cerca de 100 que de 81, es consiguiente que $\frac{10}{15}$ ó $\frac{2}{3}$ sea la raiz de $\frac{3}{7}$ con diferencia de menos de $\frac{1}{15}$.

Haciendo uso de las decimales para aproxîmar la raiz del numerador de la fraccion $\frac{21}{49}$, hallarémos que la raiz de 21 es próxîmamente 4,583; y de consiguiente la raiz de $\frac{21}{49}$ ó de su equivalente $\frac{3}{7}$ será $\frac{4,583}{7}$; y efectuando la division indicada resultará 0,655; raiz aproxîmada hasta las milésimas. Para que en esta última division sea siempre número entero el divisor, se hace que sea quadrado perfecto el denominador del quebrado, cuya raiz intentemos extraer; y para esto no siempre es necesario multiplicar ambos términos por el denominador. Si, por exemplo, hubiésemos de extraer la raiz de $\frac{7}{8}$; multiplicando por 2 sus términos, tendrémos la fraccion equivalente $\frac{14}{16}$, cuyo denominador es quadrado.

Con el mismo objeto de hallar aproxîmadamente la raiz de un quebrado ordinario cuyos términos no sean quadrados perfectos, se le suele reducir previamente á decimal, y se extrae la raiz de este nuevo quebrado equivalente al propuesto. En caso que este no sea exâc-

tamente reducible á decimal, se toma en la reduccion un número de cifras doble del que nos propongamos hallar en la raiz. Proponiéndonos, por exemplo, aproxîmar hasta las milésimas la raiz de $\frac{3}{7}$, convertirémos esta fraccion en la decimal equivalente 0,428571; y extrayendo la raiz de esta última fraccion hallarémos que la raiz de $\frac{3}{7}$ está entre 0,654 y 0,655.

105 Con estos conocimientos nos hallamos ya en estado de resolver todas las equaciones, en las quales no entre mas que la segunda potencia de la incógnita combinada con cantidades conocidas.

En efecto, si conforme á las reglas del §. 11 *reunimos en un solo miembro todos los términos que lleven esta potencia, y la despejamos de sus multiplicadores y divisores, tendrémos el valor de la incógnita extrayendo la raiz quadrada del otro miembro.*

Sea, por exemplo, la equacion

$$\frac{5}{7}x^2 - 8 = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

Haciendo desaparecer los divisores hallamos desde luego:

$$15x^2 - 168 = 84 - 14x^2;$$

trasladando al primer miembro el término $14x^2$ y al segundo el término 168, resultará:

$$15x^2 + 14x^2 = 84 + 168,$$

$$29x^2 = 252,$$

$$x^2 = \frac{252}{29},$$

$$x = \sqrt{\frac{252}{29}}.$$

Conviene advertir que para indicar la raiz de la fraccion $\frac{252}{29}$ hemos hecho descender el signo $\sqrt{\ }$ hasta por baxo de la línea que separa al numerador del deno-

minador. Si hubiésemos escrito $\frac{\sqrt{252}}{29}$, esta expresion nos indicaria el quociente que da la raiz quadrada del número 252 quando se la divide por 29; resultado diferente del primero, en el qual debe efectuarse la division antes de extraer la raiz, ó habrá que extraer dos raices y dividir la una por la otra.

Sea ademas la equacion literal

$$ax^2+b^3=cx^2+d^3;$$

y operando del mismo modo que en la anterior, tendrémos sucesivamente

$$ax^2-cx^2=d^3-b^3,$$

$$x^2=\frac{d^3-b^3}{a-c}$$

$$x=\sqrt{\frac{d^3-b^3}{a-c}}.$$

Harémos observar con esta ocasion que quando se haya de indicar la raiz quadrada de una cantidad complexa, es necesario prolongar la línea superior del signo radical, de modo que quede debaxo de ella toda la cantidad.

La raiz de la cantidad $4a^2b-2b^3+c^3$ se escribirá así: $\sqrt{4a^2b-2b^3+c^3}$;

ó de este otro modo:

$$\sqrt{}(4a^2b-2b^3+c^3);$$

sustituyendo á la línea superior del radical un paréntesis que comprehenda todas las partes de la cantidad cuya raiz se ha de extraer; y esta última expresion debe preferirse á la primera (§. 35).

En general á toda equacion de segundo grado de

la especie de las que aquí consideramos, se le podrá dar por medio de la transposicion de sus términos la forma siguiente:

$$\frac{px^2}{q}=a.$$

designando por $\frac{p}{q}$ el coeficiente de x^2, sea el que fuere; y de esta última equacion deducirémos:

$$x^2=\frac{aq}{p};$$

$$x=\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

106 Pudiéramos ya mirar como resuelta la equacion general propuesta, una vez que la fórmula que hemos deducido de ella nos manifiesta una serie de operaciones aritméticas que ya sabemos efectuar, y que efectuadas nos han de conducir seguramente á la determinacion exâcta ó aproxîmada del número desconocido. Y á la verdad, nada habria que añadir á lo dicho si jamas se hubiesen mirado como símbolos de verdaderas cantidades las expresiones algebráicas realmente absurdas, designadas comunmente con el nombre de *cantidades negativas*. Pero luego que se sometieron al cálculo aquellos símbolos como si representasen una cierta especie de cantidades, era consiguiente que todo número que se nos propusiese como un quadrado hubiese de tener no una sola sino dos raices; porque se pueden en todos casos designar, no dos cantidades, sino dos símbolos que sometidos á la misma operacion algebráica den por resultado el que representa al número propuesto.

En efecto, la equacion $x^2=25$ nos indica que x es la cantidad que elevada al quadrado ó multiplicada

por sí misma produce 25; y como algebráicamente hablando no solo $+5$ multiplicado por $+5$, sino tambien -5 multiplicado por -5 produce 25, es consiguiente que de la equacion propuesta se deduzcan estas dos:

$$x=+5;$$
$$x=-5.$$

Por la misma razon deducirémos de la equacion general

$$x^2=\frac{aq}{p}$$

estas otras dos:

$$x=+\sqrt{\frac{aq}{p}};$$
$$x=-\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Estas dos expresiones se suelen reunir en la siguiente:

$$x=\pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

en la qual el signo doble $\pm$, que se lee *mas ó menos*, indica que al valor numérico representado por

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}$$

se le puede anteponer qualquiera de los dos signos $+$ ó $-$; y que tanto con el uno como con el otro satisface á la equacion algebráica propuesta.

De lo dicho resulta la regla general de que *se debe anteponer á la raiz quadrada de qualquiera cantidad el signo doble* $\pm$.

Habiendo la misma razon para aplicar esta regla al primer miembro que al segundo, se podria con fundamento decir que de la equacion $x^2=25$, por exemplo, no solo se deduce $x=\pm 5$, sino tambien $\pm x=\pm 5$, en

la qual estan comprehendidas no dos, sino las quatro equaciones siguientes:

$$+x=+5;\quad +x=-5;\quad -x=+5;\quad -x=-5.$$

Pero observando que con solo mudar, como siempre nos es permitido, los signos de los dos miembros de las dos últimas equaciones resultan las dos primeras, se echa de ver que aquellas no se distinguen realmente de estas, y que de consiguiente de la equacion propuesta se deduce solo $x=\pm 5$, en la qual estan comprehendidas estas otras realmente distintas:

$$x=5;\quad x=-5.$$

Por esta razon se dice que toda equacion de segundo grado nos da dos distintos valores de la incógnita, en vez de que ninguna equacion del primer grado puede darnos mas de un solo valor de la misma incógnita.

107 Si despues de haber despejado la segunda potencia de la incógnita, y haber executado todas las reducciones que sean posibles en las expresiones de las cantidades, resultare con el signo $-$, ó como dicen, fuere negativo el segundo miembro de la equacion, será imposible asignar, ni aun entre los meros símbolos algebráicos llamados *cantidades negativas*, uno que represente el valor de la incógnita; y por tanto será enteramente absurda la equacion.

Si, por exemplo, tuviésemos esta:

$$x^2+25=9;$$

y de ella deduxésemos

$$x^2=9-25;$$

$$x^2=-16;$$

veríamos que ni $+4$ ni -4 pueden ser el valor de la incógnita, porque tanto $+4$ como -4 multiplicado

por sí mismo produce $+16$. Es pues enteramente absurda la suposicion de que -16 pueda ser un quadrado, ó de que pueda tener raiz quadrada exâcta ni aproxîmada. Esta absoluta imposibilidad se expresa diciendo que *la raiz quadrada de toda cantidad negativa es imaginaria.*

Lo que en realidad quiere esto decir es que la fórmula $x = \pm\sqrt{-16}$ y todas las demas semejantes, en las quales para hallar el número incógnito se nos prescribe una serie de operaciones impracticables, son indicios de algun absurdo que contienen la equacion y la qüestion de donde hayan provenido. De este absurdo ó de esta incompatibilidad entre las condiciones de los problemas que dan orígen á esta clase de fórmulas, hablarémos con alguna mayor extension mas adelante. Lo único que por ahora advertirémos es que no se la debe confundir con la que hicimos notar (§. 58) en los problemas del primer grado, en los quales una simple mutacion del signo de la incógnita hacia posible la solucion que antes no lo era; en vez de que en los del segundo, de que ahora tratamos, seria necesario para que desapareciese la imposibilidad mudar el signo al quadrado de la incógnita.

108 Hay equaciones de segundo grado con una sola incógnita, que contienen no solo la segunda potencia de esta sino tambien la primera, y ademas uno ó mas términos en los quales no se halla la incógnita. Estas equaciones, conocidas con el nombre de *equaciones completas de segundo grado*, deben tener por consiguiente tres especies de términos, que son: términos en los quales se halla el quadrado de la incógnita; otros que con-

tienen la primer potencia de la incógnita; y otros por último enteramente conocidos. Tales son las equaciones:

$$x^2 - 4x = 12;\ 4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x.$$

La primera de estas equaciones es mas sencilla que la segunda, porque solo contiene un término de cada especie, y porque en ella el quadrado de x está tomado positivamente, y solo tiene por coeficiente á la unidad. A esta última forma se deben siempre reducir las equaciones de segundo grado antes de resolverlas; de manera que toda equacion completa del segundo grado se puede representar por esta:

$$x^2 + px = q,$$

indicando p y q cantidades conocidas positivas ó negativas.

Para reducir á esta forma las equaciones que se nos presenten en otra distinta, nos valdremos de los siguientes medios: 1.° trasladaremos (§. 10) á un solo miembro todos los términos en que se halle la incógnita, y al otro miembro todos los términos enteramente conocidos: 2.° mudarémos el signo de cada uno de los términos de la equacion para hacer positivo el de x^2 si antes fuere negativo (§. 57): 3.° dividirémos todos los términos de la equacion por el multiplicador de x^2 si tuviere alguno este quadrado (§. 11); ó los multiplicarémos por el divisor del mismo quadrado en caso que esté dividido (§. 12).

Aplicando lo dicho á la equacion

$$4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

trasladarémos en primer lugar al primer miembro todos los términos en que se halla la incógnita; y así tendremos:

$$-\tfrac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

en seguida cambiarémos todos los signos para hacer po-

sitivo el término en que se halla el quadrado de la incógnita, y resultará:

$$\tfrac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

multiplicando todos los términos por el divisor 5, tendrémos:

$$3x^2 - 30x = -20;$$

y últimamente dividiéndolos por el multiplicador 3, se transformará en

$$x^2 - 10x = -\tfrac{20}{3}.$$

Si comparamos esta equacion con la general

$$x^2 + px = q$$

tendrémos en este caso particular

$$p = -10; \text{ y } q = -\tfrac{20}{3}.$$

109 Despues que esten reducidas á esta forma las equaciones, para resolverlas deberemos tener presente que (§. 34) el quadrado de una cantidad compuesta de dos términos contiene en todos casos el quadrado del primer término, el duplo del primer término multiplicado por el segundo, y el quadrado del segundo; y que por consiguiente el primer miembro de la equacion

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

en la qual a y b son cantidades conocidas, es el quadrado perfecto de $x + a$. Se la podrá pues dar esta forma:

$$(x+a)(x+a) = b.$$

Extrayendo ahora la raiz quadrada del primer miembro, é indicando la misma operacion en el segundo tendremos:

$$x + a = \pm\sqrt{b};$$

cuya equacion es solo del primer grado; y transponiendo da:

$$x = -a \pm \sqrt{b}.$$

Se resolveria pues con facilidad qualquiera equacion de segundo grado, si se la diese la forma de

$$x^2+2ax+a^2=b;$$

es decir, si su primer miembro fuese un quadrado.

Ahora bien, el primer miembro de la equacion general $x^2+px=q$, contiene ya dos términos, que se pueden considerar como dos de las tres partes del quadrado de un binomio; esto es, x^2 que será el quadrado del primer término x; y px, que será el duplo del primero multiplicado por el segundo, el qual por consiguiente no puede ser mas de la mitad de p ó $\frac{1}{2}p$. Para completar el quadrado del binomio $x+\frac{1}{2}p$, se necesita todavía el quadrado del segundo término $\frac{1}{2}p$; pero es fácil formar este quadrado puesto que p y $\frac{1}{2}p$ son cantidades conocidas. Si pues añadimos el quadrado $\frac{1}{4}p^2$ al primer miembro; añadiéndolo igualmente al segundo para conservar la igualdad, conseguirémos que el primer miembro sea el quadrado completo del binomio $x+\frac{1}{2}p$, sin que dexe de ser enteramente conocido el segundo miembro.

De este modo la equacion general primitiva

$$x^2+px=q,$$

se transformará en

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2;$$

y siendo el primer miembro de esta última el quadrado de $x+\frac{1}{2}p$; si extraemos la raiz de ambos miembros tendremos:

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2} \quad (\S.\ 105);$$

y transponiendo resulta:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2};$$

en la qual estan comprehendidas estas dos:

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2};$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Si al tiempo de extraer la raiz hemos dado el signo + al segundo término $\frac{1}{2}p$ del binomio cuyo quadrado se hallaba en el primer miembro de la equacion, ha sido porque era positivo el segundo término de este miembro; pero en caso que sea negativo, se deberá poner el signo — á la segunda parte del binomio, porque el quadrado $x^2 - 2ax + a^2$ corresponde al binomio $x - a$.

Teniendo ya resuelta la equacion general completa del segundo grado, podemos mirar como igualmente resueltas todas las particulares del mismo grado, refiriendo cada una de estas á la general

$$x^2 + px = q;$$

ó efectuando inmediatamente en cada equacion que se nos proponga, la misma serie de operaciones que acabamos de executar, y que se prescriben en la regla siguiente:

Hágase un quadrado perfecto el primer miembro de la equacion propuesta, añadiendo á los dos miembros el quadrado de la mitad de la cantidad conocida que multiplique á la primera potencia de la incógnita; extraygase despues la raiz quadrada de cada miembro, observando que la del primero ha de componerse de la incógnita y de la mitad de la cantidad conocida que la multiplique en el segundo término, tomada con el signo de este mismo término; y que la raiz del segundo miembro debe estar con el signo doble $\pm$, *é indicada con el signo* $\sqrt{\ }$, *si no*

se la puede extraer inmediatamente. Por último, despéjese la incógnita trasponiendo al segundo miembro la parte conocida que la acompañe en el primero.

Propongámonos ya algunos exemplos.

110 *Hallar un número tal que en añadiendo su séptuplo á su quadrado la suma sea 44.*

Representando por x al número desconocido, la equacion fundamental vendrá á ser:

$$x^2+7x=44;$$

la qual tiene desde luego la forma que debe, para que inmediatamente le apliquemos la regla que acabamos de establecer. Tomarémos pues $\frac{7}{2}$, mitad del coeficiente 7 que multiplica á x, y elevando aquella mitad al quadrado resultarán $\frac{49}{4}$, que añadidos á los dos miembros, transformarán la equacion propuesta en la siguiente:

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=44+\frac{49}{4};$$

la qual, reduciendo el segundo miembro á una sola fraccion, vendrá á ser estotra:

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=\frac{225}{4}.$$

La raiz del primer miembro es, segun la regla anterior, $x+\frac{7}{2}$; y la del segundo es $\frac{15}{2}$. Tendrémos pues la equacion:

$$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2};$$

de la qual se deduce por último:

$$x=-\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2},$$

equivalente á estas dos:

$$x=-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=\frac{8}{2}=4;$$
$$x=-\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{22}{2}=-11.$$

El primer valor de x resuelve la qüestion segun está propuesta y sin necesidad de hacer alteracion al-

guna en sus condiciones; puesto que si $x=4$, será

$$x^2=16;$$
$$7x=28;$$

y la suma $x^2+7x=44$.

Por lo que respecta al segundo, estando precedido del signo —, y convirtiéndose $7x$ en

$$7\times-11=-77,$$

es claro que en tal caso el séptuplo deberá restarse del quadrado del número, y que de consiguiente para que el número 11 satisfaga á la qüestion, es indispensable modificar su propuesta de modo que venga á ser esta:

Hallar un número tal, que en quitando de su quadrado su séptuplo, resulten 44.

Así que el valor negativo viene á ser aquí, lo mismo que en las equaciones del primer grado, un indicio de cierta modificacion que debe hacerse en la propuesta del problema para que satisfaga completamente á todas sus condiciones la misma cantidad sin el signo —. Por manera que aunque toda equacion del segundo grado tenga dos soluciones, no por eso tendrá siempre dos soluciones el problema que nos haya conducido á la equacion.

Si traduxésemos al lenguage algebráico la qüestion que hemos propuesto últimamente, tendríamos esta equacion: $x^2-7x=44$;
y resolviéndola resultaria:

$$x^2-7x+\tfrac{49}{4}=44+\tfrac{49}{4};$$
$$x^2-7x+\tfrac{49}{4}=\tfrac{225}{4};$$
$$x-\tfrac{7}{2}=\pm\tfrac{15}{2};$$
$$x=\tfrac{7}{2}\pm\tfrac{15}{2};$$
$$x=\tfrac{7}{2}+\tfrac{15}{2}=\tfrac{22}{2}=11;$$
$$x=\tfrac{7}{2}-\tfrac{15}{2}=-\tfrac{8}{2}=-4.$$

En esta solucion es fácil advertir que el valor que en la anterior era negativo se ha convertido en positivo, porque satisface exâctamente á la nueva propuesta; y por el contrario el valor que antes era positivo, resulta aquí negativo, porque es necesario alterar una de las condiciones de la nueva qüestion para que 4 sea el número que buscábamos.

Suele pues el Algebra reunir en cada equacion de segundo grado dos distintas qüestiones cuyas propuestas tienen entre sí cierta analogía.

111 Algunas veces sucede que la qüestion que nos conduce á una equacion de segundo grado es susceptible de dos distintas soluciones sin necesidad de alterar ninguna de las condiciones de la propuesta. Esto es lo que por lo comun nos indica el que sean positivos los dos valores de la incógnita; segun puede verse en la qüestion siguiente:

Hallar un número tal, que si á su quadrado se añaden 15, la suma sea igual al octuplo del mismo número desconocido.

Sea x este número; y la equacion fundamental será:

$$x^2+15=8x.$$

Executando en esta equacion las operaciones prescritas (§. 108) tendremos:

$$x^2-8x=-15;$$
$$x^2-8x+16=-15+16;$$
$$x^2-8x+16=1;$$
$$x-4=\pm 1;$$
$$x=4\pm 1;$$
$$x=5;$$
$$x=3.$$

Siendo, como se ve, positivos ó sin nota alguna de

absurdos los dos valores de la incógnita, es de inferir que la qüestion, segun está propuesta y sin necesidad de modificacion alguna, podrá ser susceptible de dos soluciones. Y en efecto, si al quadrado de 5 se le añaden 15, resultan 40, que es 8 veces 5; y si al quadrado de 3 le añadimos 15, resultan 24, octuplo de 3. Se verifican pues en dos distintos números las condiciones que comprehende la propuesta del problema.

112 Otras veces resultan negativos los dos valores; y esta circunstancia nos indica que no es posible resolver la qüestion propuesta, sin alterar de tal modo sus condiciones que venga á mudar de signo el término en que se halle la primera potencia de la incógnita. Supongamos, por exemplo, que la qüestion traducida al lenguage algebráico esté cifrada en esta equacion:

$$x^2+5x+6=2;$$

la qual nos está indicando que *buscamos un número cuyo quadrado sumado con el quíntuplo del mismo número y con seis unidades mas, dé por suma el número dos;* y aunque lo absurdo de esta qüestion se dexa conocer á primera vista, es importante averiguar cómo nos lo manifiesta el Algebra, porque nos indicará al mismo tiempo la modificacion que debe hacerse en la propuesta para que desaparezca enteramente la incompatibilidad que ahora se advierte entre sus condiciones. En efecto, resolviendo la equacion propuesta hallarémos sucesivamente:

$$x^2+5x=-4;$$

$$x^2+5x+\tfrac{25}{4}=\tfrac{25}{4}-4=\tfrac{9}{4};$$

$$x+\tfrac{5}{2}=\pm\tfrac{3}{2};$$

$$x=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}=-1;$$

$$x=-\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}=-4.$$

El signo − que antecede á los dos números 1 y 4 se puede mirar no solo como una nota del absurdo que envuelve la qüestion segun esta propuesta, sino tambien como un indicio de que si en vez de sumar el quíntuplo del número desconocido con su quadrado y con 6, se hubiese de restar aquel quíntuplo de la suma de las otras dos cantidades, satisfarian completamente á la qüestion los dos números 1 y 4. Por manera que para que desaparezca la incompatibilidad que habia entre las condiciones de la qüestion, es indispensable proponerla de esta otra manera:

Hallar un número tal que si de su quadrado se resta su quíntuplo, y al residuo se le añade el número 6, resulte el número 2.

Esta propuesta, traducida al lenguage algebráico, se transforma en la siguiente equacion:

$$x^2 - 5x + 6 = 2;$$

de la qual se deduce que qualquiera de los dos números 1 y 4 tiene las condiciones que abraza la nueva qüestion.

113 Supongamos que se nos haya propuesto el siguiente problema:

Distribuir un número p *en dos partes cuyo producto sea igual á* q.

Indicando por x una de estas partes, estará bien representada la otra por $p-x$; y su producto será $px-x^2$; tendrémos pues la equacion

$$px - x^2 = q;$$

ó mudando los signos,

$$x^2 - px = -q;$$

y resolviendo esta última equacion hallarémos:

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Si particularizando la qüestion hiciésemos

$$p = 10 \quad \text{y} \quad q = 21,$$

tendríamos:
$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21};$$
$$x = 5 \pm 2;$$
$$x = 7;$$
$$x = 3.$$

Es decir que una de las partes seria 7, y la otra seria por consiguiente 10 − 7 ó 3.

Si, por el contrario, tomásemos 3 por valor de x, la otra parte seria 10 − 3 ó 7; de manera que las dos soluciones de la equacion no vienen á ser mas de una sola de la qüestion segun esta propuesta; porque la segunda no es mas que una variacion en el órden de las mismas partes que se han determinado en la primera.

La fórmula que hemos deducido de la equacion $px - x^2 = q$ manifiesta que en la qüestion de que se trata no se pueden tomar indistintamente los números p y q; porque si q fuere mayor que $\frac{p^2}{4}$ ó que el quadrado de $\frac{1}{2}p$, el residuo representado por el binomio $\frac{p^2}{4} - q$ seria negativo, y vendríamos á dar con el indicio de absurdo, de que hemos hablado (§. 107).

Si hiciésemos, por exemplo,

$$p = 12 \quad \text{y} \quad q = 45,$$

resultaria:

$$12x - x^2 = 45;$$
$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 45} = 6 \pm \sqrt{-9};$$

luego con estos datos seria imposible el problema.

Sin embargo, así como los valores negativos de la incógnita nos manifiestan no solo la imposibilidad de resolver el problema, sino tambien el modo de rectificar su propuesta; los valores imaginarios pueden servirnos de indicios de que para ser posible la solucion, debia la propuesta ser tal que resultase cambiado el signo del término en que se halle el quadrado de la incógnita. En efecto, si en vez de la equacion

$$12x-x^2=45,$$

á la qual nos ha conducido el problema particular propuesto, hubiese resultado qualquiera de estas:

$$x^2+12x=45;$$

$$x^2-12x=45;$$

hubiéramos obtenido las siguientes expresiones de los valores de la incógnita:

$$x=-6\pm\sqrt{81}=-6\pm9;$$

$$x=6\pm\sqrt{81}=6\pm9;$$

en las quales han desaparecido enteramente los símbolos absurdos que resultaron de la equacion propuesta, y que nos dieron á conocer la imposibilidad de resolver el problema que nos conduxo á ella.

Las expresiones particulares

$$\sqrt{-9};\ 6+\sqrt{-9};\ 6-\sqrt{-9};$$

y las generales

$$\sqrt{-b};\ a+\sqrt{-b};\ a-\sqrt{-b};$$

y en una palabra, todas las que sean ó contengan raices quadradas de cantidades negativas son conocidas con el nombre de *cantidades imaginarias;* pero con mas exâctitud deberian llamarse *símbolos imaginarios*, por-

que representando el resultado final de operaciones impracticables, no pueden ser cantidades, sino unos vanos simulacros que hacen las veces de los verdaderos valores que se hubieran obtenido si hubiese sido posible la qüestion de donde hayan dimanado.

Sin embargo, los algebristas lejos de haber despreciado enteramente estos símbolos imaginarios, no solo los han mirado como indicios de la modificacion que debia hacerse en la propuesta de la qüestion, sino que ademas los han sometido á las operaciones del cálculo, como si representasen verdaderas cantidades; porque han visto que combinándolos baxo ciertas leyes y reglas desaparece lo que en estas expresiones habia de absurdo, y se obtienen resultados verdaderos y reales, es decir, fórmulas que no prescriben operacion alguna impracticable. Esto, que á primera vista parece incomprehensible, no tiene nada de maravilloso, si atendemos á que b, por exemplo, es un símbolo de una verdadera cantidad, y á que si $-b$ y $\sqrt{-b}$ no lo son, es porque representan resultados de operaciones impracticables. Si pues para el logro del intento que nos propongamos en una qüestion, descubrimos una serie de operaciones, en la qual se inutilicen ó se eviten todas las que sean impracticables, deberá ser real y efectivo el resultado final. [1]

114 Despues de conocer, por medio de las raices imaginarias que aparecen en el resultado final del cálculo, el absurdo de la qüestion, es natural que se desee descubrir entre las condiciones de la propuesta, quál

1 De esto dirémos algunos exemplos mas adelante, y sobre todo en el *Complemento del Algebra.*

de ellas sea el orígen de la imposibilidad de la solucion. Concretándonos, por exemplo, al problema general propuesto al principio del párrafo anterior, podrémos hacer la reflexîon siguiente:

Si representamos por d la diferencia de las dos partes del número propuesto, la mayor será (§. 3) $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, y la menor $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$; y habiendo demostrado en el exemplo primero del §. 34 que

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\times\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4};$$

es visto que mientras d tenga algun valor, el producto de las dos partes del número propuesto, qualesquiera que sean estas, será siempre menor que $\frac{p^2}{4}$, ó que el quadrado de la mitad de la suma de ellas ó del número propuesto; y en siendo nulo el valor de la diferencia d, ó lo que es lo mismo, en siendo iguales las dos partes, cada una de estas será igual á $\frac{p}{2}$, y su producto será $\frac{p^2}{4}$. Es, pues, absurdo suponer que el producto de algunas dos partes del número propuesto pueda ser mayor que el quadrado de su mitad; y todo razonamiento fundado en esta falsa suposicion ha de venir por precision á parar en una conclusion igualmente absurda. Así que, no es extraño que el Algebra nos prescriba, para determinar en tal caso los valores de las dos partes desconocidas, la execucion de operaciones impracticables; dándonos por este medio á conocer que no exîste lo que buscábamos.

115 A poco que reflexîonemos sobre lo expuesto acerca de la naturaleza de las equaciones completas de segundo grado con una sola incognita, inferirémos que todas ellas se pueden reducir á estas quatro expresiones generales:

$$1.^a \ldots\ x^2+px=q; \qquad 3.^a \ldots\ x^2+px=-q;$$
$$2.^a \ldots\ x^2-px=q; \qquad 4.^a \ldots\ x^2-px=-q;$$

las quales se reunen todas en esta otra:

$$x^2 \pm px = \pm q.$$

Resolviéndolas, deducirémos las quatro fórmulas siguientes:

$$1.^a \ldots\ x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q};$$

$$2.^a \ldots\ x=\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q};$$

$$3.^a \ldots\ x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

$$4.^a \ldots\ x=\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

Si exâminamos atentamente estas fórmulas, vendrémos en conocimiento de que las únicas equaciones de donde pueden resultar raices imaginarias, son las que tengan negativa la cantidad enteramente conocida q despues de estar traspuesta al segundo miembro; y para ello es necesario que esta cantidad sea mayor que el quadrado de la mitad del coeficiente p de la primera potencia de la incógnita. En ninguno de los demas casos habrá raices imaginarias; pero serán incomensurables siempre que el valor numérico del binomio que se halla debaxo del signo radical no sea un quadrado perfecto. Todos los valores que no sean ó no contengan raices imaginarias se llaman *valores reales*.

La última fórmula nos manifiesta que en todas las equaciones semejantes á la quarta, y en las quales sea q menor que $\frac{1}{4}p^2$, los dos valores de la incógnita, ora sean comensurables, ora incomensurables, son ambos positivos; porque $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ es siempre menor que $\frac{1}{2}p$.

La penúltima fórmula nos hace ver que en las equaciones semejantes á la tercera, quando q sea menor que $\frac{1}{4}p^2$, los valores de la incógnita, ya sean comensurables ó incomensurables, serán ambos negativos, porque $\frac{1}{2}p$ es siempre mayor que $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$.

En todos los demas casos uno de los valores de la incógnita será positivo, y el otro negativo.

Aunque todas estas diferentes especies de valores satisfagan á las equaciones de donde hayan dimanado, los positivos son los únicos que pueden satisfacer á las qüestiones en los mismos términos en que esten propuestas, y sin necesidad de modificar ninguna de sus condiciones; los valores negativos y los imaginarios no son mas que unos vanos símbolos que nos pueden indicar, no solo la imposibilidad de las qüestiones, sino tambien el modo de rectificar sus propuestas en términos que desaparezca la incompatibilidad que anteriormente habia. No quiere esto decir que todo valor positivo de la incógnita satisfaga siempre á la qüestion segun esté propuesta; pues si nos propusiéramos, por exemplo, *hallar un número* x *menor que* 1, *tal que el quadrado de* 1 − x *fuese igual á* $\frac{1}{4}$, tendríamos esta equacion:

$$(1-x)^2=\tfrac{1}{4};$$

y de ella deduciríamos con suma facilidad que

$$1-x=\pm\tfrac{1}{2};$$

y por consiguiente estotras dos:

$$x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

De estos dos valores, sin embargo de que ambos sean positivos, y de que ambos satisfagan á la equacion fundamental, sólo el primero satisface completamente á la qüestion.

Aun los valores incomensurables indican que no es posible hallar un número que satisfaga completamente á la qüestion, bien que podamos encontrar números que mas y mas se aproxîmen al que busquemos, el qual nos es absolutamente imposible determinar [1].

116 Como sea muy interesante que los principiantes adquieran ideas exâctas de todos los hechos analíticos que no parecen conformes á las nociones vulgares, he creido conveniente añadir á lo ya expuesto (§. 106) algunas nuevas razones que hagan ver la necesidad que hay de admitir dos soluciones en las equaciones de segundo grado.

Nos proponemos pues demostrar *que como exîsta una cantidad ó un mero símbolo, designado por* a, *que sustituido en lugar de* x *satisfaga á la equacion de segundo grado* $x^2 + px = q$, *y que por consiguiente sea valor de* x; *debe forzosamente haber otra cantidad ú otro símbolo que satisfaga á la misma equacion, y que de consiguiente será otro valor de la misma incógnita.* Si, con efecto, sustituimos a en lugar de x, resultará $a^2 + pa = q$; y pues que a es por suposicion valor de x, será q precisamente igual á la cantidad $a^2 + pa$; luego

1 En el tratado de la *aplicacion del Algebra á la Geometría* completarémos estas nociones relativas á las diferentes especies de raices de las equaciones.

podrémos sustituir esta expresion en lugar de q en la equacion propuesta, y de este modo se transformará en estotra:

$$x^2+px=a^2+pa.$$

Trasladando todos los términos del segundo miembro al primero, resultará:

$$x^2+px-a^2-pa=0;$$

la qual se puede escribir de este modo:

$$x^2-a^2+p(x-a)=0$$

y siendo (§. 34)

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a);$$

se ve inmediatamente que el primer miembro es divisible por $x-a$, y da un quociente exâcto, que es $x+a+p$; luego, segun esto, tendrémos:

$$x^2+px-q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p).$$

Ahora, es evidente que un producto es igual á cero quando lo es qualquiera de sus factores; luego debemos tener $(x-a)(x+a+p)=0$ no solo quando $x=a$, lo qual da

$$x-a=0$$

sino tambien quando $x+a+p=0$, de donde resulta

$$x=-a-p.$$

Queda pues probado que si es a uno de los valores de la incógnita, $-a-p$ será precisamente otro.

Este resultado concuerda con los dos valores comprehendidos en la fórmula

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

porque suponiendo que sea $a=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, por exemplo, vendrá á ser

$$-a-p=\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}-p=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

el qual es con efecto el segundo valor de la incógnita, ó como se dice, la *segunda raiz* de la equacion.

Mas adelante volverémos á estas observaciones que contienen el gérmen de la teoría general de las equaciones de todos los grados.

117 La dificultad de poner en equacion los problemas de segundo grado y de todos los demas superiores es la misma que hemos hecho notar (§§. 8 y 14) en los del primero; pues consiste siempre en el modo de poner en claro todas las condiciones comprehendidas en la propuesta, y de expresarlas por medio de caractéres algebráicos. Las qüestiones que hasta aquí hemos propuesto del segundo grado no presentan dificultad alguna en esta parte; y aunque los principiantes deban ya haberse exercitado en los problemas que propusimos (§§. 82 y ant.) del primer grado, vamos sin embargo á proponer y resolver algunas otras qüestiones que darán ocasion á muchas observaciones muy importantes.

De dos artesanos que han estado trabajando en una obra y ganaban diferentes jornales, el primero cobró por los dias que habia trabajado 384 reales; el segundo trabajó 6 dias menos, y percibió por sus jornales 216 reales; pero es de advertir que si por la inversa el segundo hubiese trabajado tantos dias como el primero, y este hubiese trabajado seis dias menos, ganando cada uno de ellos el mismo jornal que antes, hubiera percibido tanta cantidad el uno como el otro por valor de todos sus respectivos jornales. En esta suposicion se pregunta: *¿quántos dias ha trabajado cada uno de ellos, y quánto ganaba al dia?*

Aunque en realidad son quatro las cantidades desconocidas que nos proponemos determinar en este pro-

blema, no es necesario representar mas de una de ellas por alguna de las últimas letras del alfabeto, porque conocemos las relaciones que cada una tiene con todas las demas. En efecto, representando por x el número de los dias que estuvo empleado el primer artesano, será $x-6$ el de los dias de trabajo del segundo;

el jornal del primero será $\frac{384}{x}$;

y el del segundo vendrá á ser $\frac{216}{x-6}$.

Ahora, si este último hubiese trabajado por espacio de x dias, hubiera ganado

$$x \times \frac{216}{x-6} \text{ ó } \frac{216x}{x-6};$$

y si el primero hubiese trabajado tan solo $x-6$ dias, no hubiera percibido mas de

$$(x-6)\frac{384}{x} \text{ ó } \frac{384(x-6)}{x};$$

luego la equacion fundamental del problema vendrá á ser:

$$\frac{216x}{x-6} = \frac{384(x-6)}{x}.$$

Puesto ya el problema en equacion, lo primero que deberémos hacer en esta es eliminar los denominadores por medio de la multiplicacion que llaman en *cruz*. Así tendrémos:

$$216x^2 = 384(x-6)(x-6);$$

y siendo los números 216 y 384 exâctamente divisibles por 6, se simplificará este resultado por medio de esta division, y quedará reducido á

$$36x^2 = 64(x-6)(x-6).$$

Para resolver esta equacion pudiéramos efectuar las multiplicaciones indicadas, y preparar el resultado con

arreglo á lo prescrito (§. 108); pero siendo el objeto de aquella regla el facilitar la extraccion de la raiz quadrada de los dos miembros de la equacion propuesta, no es necesario observarla en este caso, porque se nos presentan desde luego los dos miembros en forma de quadrados; pues $36x^2$ es el quadrado de $6x$; y $64(x-6)(x-6)$ es el quadrado de $8(x-6)$: luego inmediatamente y sin necesidad de preparacion alguna podremos deducir, extrayendo la raiz quadrada de ambos miembros:

$$6x = \pm 8(x-6)$$

de donde resultan sucesivamente los dos valores de la incógnita:

$$6x = 8x - 48;\ x = 24;$$
$$6x = -8x + 48;\ x = \tfrac{24}{7}.$$

El primer valor nos manifiesta que el primer jornalero ha trabajado 24 dias, y ha ganado por consiguiente $\frac{384}{24}$ de real ó 16 reales al dia; que el segundo ha trabajado 18 dias y ganado $\frac{216}{18}$ de real ó 12 reales al dia.

El segundo valor, aunque tambien satisface á la equacion fundamental del problema, no satisface á este segun está propuesto, sino con cierta modificacion; y de consiguiente viene á ser la solucion de otro problema análogo, segun hemos observado (§. 110).

118 *Se presentan á un banquero dos letras á cargo de un mismo comerciante para que las descuente; la primera de 550 pesos pagadera á los siete meses; y la segunda de 720 pesos pagadera á los quatro meses; el banquero da por las dos la cantidad de 1200 pesos;* y se nos pregunta: *¿quál es el tanto por ciento anual de interes á que se han descontado estas letras?*

Con el objeto de evitar las fracciones en la expresion del *tanto por ciento* correspondiente á los siete meses y á los quatro, representarémos por $12x$ el respectivo á un año y á una cantidad de 100 pesos; con lo qual vendrá á ser x el interes mensual. En este supuesto se obtendrá el valor actual de la primera letra haciendo (*Aritm.* §. 165) la siguiente proporcion:

$$100+7x : 100 :: 550 : \frac{55000}{100+7x};$$

y el valor actual de la segunda letra resultará de esta otra proporcion semejante:

$$100+4x : 100 :: 720 : \frac{72000}{100+4x}.$$

Reuniendo estos dos valores tendrémos para equacion fundamental del problema:

$$\frac{55000}{100+7x}+\frac{72000}{100+4x}=1200.$$

Los dos miembros se pueden dividir por 200, y así resulta:

$$\frac{275}{100+7x}+\frac{360}{100+4x}=6;$$

y haciendo desaparecer los denominadores (§. 13) hallarémos sucesivamente:

$$275(100+4x)+360(100+7x)=6(100+7x)(100+4x);$$

$$27500+1100x+36000+2520x=$$
$$60000+6600x+168x^2;$$

la qual ordenada, se reduce á

$$168x^2+2980x=3500;$$

y dividiendo todos los términos por 2, resulta:

$$84x^2+1490x=1750,$$

la qual da por último:

$$x^2+\frac{1490}{84}x=\frac{1750}{84}.$$

Y comparando esta equacion particular con la general $x^2+px=q$;

resulta: $p=\frac{1490}{84}$; $q=\frac{1750}{84}$;

y la expresion de la fórmula general

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

se convierte en

$$x=-\frac{745}{84}\pm\sqrt{\frac{745\times745}{84\times84}+\frac{1750}{84}}.$$

Es necesario reducir desde luego á una sola las fracciones que se hallan debaxo del radical, y así resultará:

$$\frac{745\times745+1750\times84}{84.84}=\frac{702025}{84.84};$$

y observando que el denominador de esta fraccion es un quadrado perfecto, solo faltará extraer la raiz quadrada del numerador. Aproxîmándola hasta las milésimas hallarémos que $\sqrt{702025}$ es 837,869; y dándole el denominador 84, serán los dos valores de la incógnita:

$$x=-\frac{745}{84}+\frac{837,869}{84}=\frac{92,869}{84}=1,1056;$$

$$x=-\frac{745}{84}-\frac{837,869}{84}=-\frac{1582,869}{84}=-18,843.$$

El primero de estos dos valores, que no tiene nota alguna de absurdo, es el único que resuelve la qüestion segun está propuesta; y así dirémos que el *tanto por ciento anual* que deseábamos conocer, y que hemos representado por $12x$, será:

$$12x=13,267.$$

119 La qüestion siguiente es digna de atencion por las particularidades que ofrecen las expresiones de los valores de la incógnita.

Distribuir un número en dos partes, cuyos quadrados tengan entre sí una razon dada.

Sea a el número dado;

m la razon de los quadrados de sus dos partes;

x una de estas partes;

la otra será $a-x$;

y segun la propuesta de la qüestion tendrémos la equacion

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m.$$

Para resolverla se nos presentan dos medios; porque ó la podemos preparar para darle la forma de la equacion general $x^2+px=q$; ó aprovecharnos de la observacion que fácilmente se puede hacer de que la fraccion

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}$$

es un quadrado, pues lo son su numerador y su denominador. Haciendo uso de esta observacion deducirémos inmediatamente:

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m};$$

$$x=\pm(a-x)\sqrt{m};$$

y resolviendo separadamente las dos equaciones de primer grado comprehendidas en la última, que son:

$$x=+(a-x)\sqrt{m};$$

$$x=-(a-x)\sqrt{m};$$

nos resultarán:

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Del primer valor de la incógnita se deduce que la segunda parte del número propuesto es:

$$a-\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

y las dos partes vienen á ser:

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \text{ y } \frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

las quales son, segun lo exîge la qüestion, menores ambas que el número propuesto.

Del segundo valor se infiere que la otra parte del número propuesto es:

$$a+\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

y entónces las dos partes son:

$$\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \text{ y } \frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

y siendo contrarios sus signos, no es ya realmente la

suma de ellas igual al número propuesto; lo es su diferencia, y así hemos venido á resolver al mismo tiempo otro problema.

Haciendo $m = 1$, esto es, suponiendo que hayan de ser iguales los quadrados de las dos partes que se buscan, tendrémos:

$$\sqrt{m} = 1;$$

y el primer valor de la incógnita da dos partes iguales

$$\frac{a}{2} \text{ y } \frac{a}{2};$$

resultado evidente por sí mismo. Pero el segundo valor da por resultado el símbolo del infinito (§. 68), á saber:

$$\frac{-a}{1-1} \text{ ó } \frac{-a}{0}, \text{ y } \frac{a}{1-1} \text{ ó } \frac{a}{0}.$$

Lo que estas expresiones quieren decir es que la suposicion de dos cantidades cuya diferencia sea a, y cuyos quadrados sean iguales, es enteramente absurda; y de consiguiente jamas se las podrá designar. Sin embargo quanto mayores se elijan aquellas dos cantidades con aquella diferencia, tanto mas se aproxîmarán á tener la otra condicion.

Con efecto, sean x y $x-a$ las dos cantidades, y la razon de sus quadrados estará bien representada por

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2};$$

y dividiendo los dos términos de esta fraccion por x^2, resultará

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}}.$$

Ahora, es claro que quanto mayor sea el número x,

tanto menores serán las fracciones $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$, y tanto mas se aproxîmará la razon anterior á ser igual á $\frac{1}{1}$ ó á 1, sin que jamas pueda llegar á ser igual á 1. Por manera que 1 es el *límite* de aquella razon (*Arit.* §. 101); y esto es lo que se ha querido decir quando se ha dicho que para que aquel quebrado ó razon fuese exâctamente igual á 1, como requiere la propuesta, es necesario que fuese *infinito* el valor de la x; lo qual es manifiestamente imposible.

120 Para comparar el método general de resolver las equaciones completas de segundo grado con el que acabamos de seguir, deducirémos de la equacion

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m$$

las siguientes:

$$x^2=m(a-x)(a-x);$$
$$x^2=a^2m-2amx+mx^2;$$
$$x^2-mx^2+2amx=a^2m;$$
$$(1-m)x^2+2amx=a^2m;$$
$$x^2+\frac{2am}{1-m}x=\frac{a^2m}{1-m}.$$

Cotejando esta última equacion con la general $x^2+px=q$, resultará:

$$p=\frac{2am}{1-m}, \text{ y } q=\frac{a^2m}{1-m};$$

y la fórmula general se transformará en estotra:

$$x=-\frac{am}{1-m}\pm\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)\,(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}}.$$

Estos valores de x parecen muy diferentes de los que se han hallado antes; y sin embargo deben reducir-

se á aquellos: y esto es cabalmente en lo que puede sernos útil este exemplo, porque manifiesta la importancia de las transformaciones que las diferentes operaciones algebráicas producen en las expresiones de las cantidades.

En primer lugar es necesario reducir á un mismo denominador las dos fracciones comprehendidas debaxo del radical; lo qual se efectuará multiplicando por $1-m$ los dos términos de la segunda, y resultará:

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}=\frac{a^2m^2+a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)}=$$

$$\frac{a^2m^2+a^2m-a^2m^2}{(1-m)(1-m)}=\frac{a^2m}{(1-m)(1-m)};$$

y siendo el denominador un quadrado, podrémos efectuar inmediatamente la extraccion de su raiz, é indicarémos la del numerador. Así tendrémos:

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}}=\frac{\sqrt{a^2m}}{1-m};$$

pero la expresion $\sqrt{a^2m}$ se puede todavía simplificar.

Es claro que el quadrado de un producto viene á ser el producto de los quadrados de sus factores, puesto que, por exemplo,

$$bcd\times bcd=b^2c^2d^2,$$

y que por consiguiente la raiz de $b^2c^2d^2$ no es mas que el producto de las raices b, c y d de los factores b^2, c^2 y d^2. Aplicando esta observacion al producto a^2m, se ve que su raiz debe ser el producto de a, raiz de a^2, multiplicada por $\sqrt{m}$, que es la indicacion de la raiz de m; ó que $\sqrt{a^2m}=a\sqrt{m}$.

De estas diferentes transformaciones se sigue que

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m};$$

cuya expresion comprehende estas dos:

$$x = \frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m};\quad x = \frac{-am - a\sqrt{m}}{1-m} \text{ *.}$$

Por sencillas que sean estas expresiones no son todavía las del párrafo anterior; y si se quiere aplicarlas al caso en que $m = 1$, se convierten en

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0};$$

$$x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

Volvemos aquí á encontrar en la segunda el símbolo del infinito como anteriormente; pero la primera presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, de que ya hemos visto algunos exemplos (§§. 69 y 70); y antes de decidir acerca de su valor convendrá exâminar si se halla ó no en el caso indicado (§. 70), es decir, si algun factor comun al numerador y al denominador es el que hace que quando $m = 1$, se reduzca á $\frac{0}{0}$ la expresion del valor de la incógnita.

* Las dos últimas expresiones equivalen á estotras: $x = -\frac{am - a\sqrt{m}}{1-m}$; $x = -\frac{am + a\sqrt{m}}{1-m}$, las quales están ambas comprehendidas en esta: $x = -\frac{am \mp \sqrt{am}}{1-m}$. Tambien equivalen á las siguientes: $x = \frac{am - a\sqrt{m}}{m-1}$; $x = \frac{am + a\sqrt{m}}{m-1}$; $x = \frac{am \mp a\sqrt{m}}{m-1}$. Estas transformaciones estan fundadas en que *podemos cambiar el signo del dividendo, con tal que tambien mudemos el del quociente ó el del divisor.*

La expresion $\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}$ se trasforma en

$$\frac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m}=\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}.$$

Por lo que hace al numerador de esta fraccion, bien se ve que se convierte en cero por razon del factor $\sqrt{m}-m$: es preciso pues averiguar si este último factor y el denominador tienen algun divisor comun. Para evitar el embarazo que en esta investigacion podria ocasionar el signo radical, supondremos que $\sqrt{m}=n$; y de consiguiente que elevando al quadrado sea $m=n^2$. Por es temedio se transformarán las expresiones

en $$\begin{matrix}\sqrt{m}-m \text{ y } 1-m\\ n-n^2 \text{ y } 1-n^2.\end{matrix}$$

Ahora, $n-n^2=n(1-n)$; y $1-n^2=(1-n)\times(1+n)$; restituyendo pues en lugar de n su equivalente $\sqrt{m}$, resultará que

$$\sqrt{m}-m=\sqrt{m}\times(1-\sqrt{m}),$$

$$\text{y}\quad 1-m=(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m});$$

y por consiguiente

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}=\frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

resultado enteramente igual al del §. 119.

Del mismo modo se simplifica la expresion del segundo valor de x, observando que

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m}=\frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$$

como en el §. 119[1].

No es difícil conocer que hubiéramos podido evitar los radicales en los cálculos precedentes, representando por m^2 la razon de los quadrados de las dos partes del número propuesto. En tal caso hubiera sido m la raiz quadrada de aquella razon; y puesto que suponemos conocida esta, podríamos considerar como dada su raiz: pero acaso no se hubiera echado entonces de ver la utilidad de semejante variacion en los datos, de la qual se valen con freqüencia los algebristas para simplificar los cálculos. Ahora que ya se pueden haber conocido las ventajas de aquella variacion, recomiendo á mis lectores que vuelvan á comenzar la solucion del problema, poniendo m^2 en lugar de m; en la inteligencia de que lo practicado en esta qüestion podrá servirles de norma para todas las demas literales.

1 El exemplo que acabamos de exponer con tanta extension viene á ser en sustancia un problema resuelto por *Clairaut* en su Algebra, y propuesto en estos términos: *Hallar en la línea que une dos luces qualesquiera, el punto en que estas dos luces alumbran con igual intensidad.* Hemos despojado este problema de las circunstancias físicas, porque ademas de ser agenas del objeto de esta obra distraen la atencion que exîgen las particularidades algebráicas, muy notables por sí mismas, y que por esta razon hemos desenvuelto mas que *Clairaut*.

De la extraccion de la raiz quadrada de las cantidades algebráicas.

121 La transformacion que en el párrafo anterior hemos executado de $\sqrt{a^2 m}$ en $a\sqrt{m}$ es de la mayor importancia; porque nos proporciona un medio de reducir al menor número posible los factores contenidos debaxo del radical, y de simplificar otro tanto la extraccion que aun haya que efectuar.

Esta transformacion consiste, como se ha visto, *en tomar separadamente la raiz de cada uno de los factores que sean quadrados; en escribir todas estas raices fuera del radical como multiplicadores ó coeficientes suyos; y en dexar debaxo de él, tales como sean, los factores que no sean quadrados.*

Esta regla supone por de contado que tenemos medios de reconocer si es ó no un quadrado una cantidad algebráica, y que siéndolo sabemos extraer la raiz. Para que sobre esto no quede la menor duda, tratarémos primeramente de las cantidades monomias, y despues pasarémos á las polinomias.

122 De la regla de los exponentes prescrita para la multiplicacion (§. 31) resulta claramente que *la segunda potencia de una cantidad qualquiera tiene un exponente doble del de esta cantidad.*

Sabiendo, por exemplo, como sabemos que

$$a^1 \times a^1 = a^2;\ a^2 \times a^2 = a^4;\ a^3 \times a^3 = a^6, \&c.$$

nos es fácil inferir que *todo factor que sea un quadrado ha de tener un exponente par; y que se obtiene su raiz escribiendo la misma letra con un exponente igual á la mitad del exponente primitivo.*

Y así tenemos $\sqrt{a^2}=a^1$ ó a; $\sqrt{a^4}=a^2$; $\sqrt{a^6}=a^3$; &c.

Por lo que respecta á los factores numéricos que sean quadrados, se executa la extraccion de sus raices por las reglas establecidas anteriormente.

Si queremos pues simplificar la expresion $\sqrt{64a^6b^4c^2}$, observarémos que son quadrados los factores $a^6b^4c^2$, porque todos tienen exponente par; y puesto que sabemos que 64 es el quadrado de 8, inferirémos que siendo la cantidad que está debaxo del radical el producto de quatro factores quadrados, su raiz deberá ser el producto de las quatro raices; y por consiguiente $\sqrt{64a^6b^4c^2}$ $=8a^3b^2c$.

123 Quando no se verifique esta circunstancia, se debe descomponer el producto propuesto en otros dos, uno de los quales contenga únicamente los factores quadrados, y el otro los que no lo sean; para lo qual se deben exâminar uno por uno todos los factores.

Si nos proponemos, por exemplo $\sqrt{72a^4b^3c^5}$, echarémos fácilmente de ver que entre los divisores del número 72 hay quadrados perfectos, á saber: 4, 9 y 36; y tomando el mayor de estos tendrémos $72=36\times 2$; el factor a^4 es un quadrado; y pasando despues al factor b^3, que no es un quadrado por ser impar el exponente 3, observarémos que este factor se puede descomponer en otros dos b^2 y b, el primero de los quales es un quadrado; y así tendrémos:

$$b^3=b^2\times b;$$

del mismo modo

$$c^5=c^4\times c;$$

é igual transformacion haríamos con qualquiera otra letra que tuviese un exponente ímpar. Todas estas descomposiciones dan

$$72a^4b^3c^5=36\times 2a^4b^2bc^4c;$$

y reuniendo por una parte todos los factores quadrados, y por otra todos los que no lo son, la misma expresion se transformará en

$$36a^4b^2c^4\times 2bc;$$

y por último, tomando la raiz del primer producto, é indicando la del segundo, tendrémos

$$\sqrt{72a^4b^3c^5}=6a^2bc^2\sqrt{2bc}.$$

He aquí algunos otros exemplos de reducciones semejantes, precedidas de los cálculos que nos conducen á ellas.

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}}=\sqrt{a^2\times\frac{a}{b}}=a\sqrt{\frac{a}{b}}=a\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}ab^2}\,6=\sqrt{\frac{25\times 3ab^2}{49\times 2}}=6\sqrt{\frac{25b^2\times 3a}{49\times 2}}=$$

$$\frac{6\times 5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}}=\frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}=\frac{30b}{7}\sqrt{\frac{6a}{4}}=$$

$$\frac{30b}{14}\sqrt{6a}=\frac{15b}{7}\sqrt{6a}.$$

En ambos exemplos hemos hecho últimamente salir fuera del radical el denominador de las fracciones algebráicas, haciéndolo un quadrado, segun lo que hemos dicho (§. 104) con respecto á las fracciones numéricas.

124 Por lo que hace á la raiz quadrada de los po-

linomios, convendrá tener presente que ningun binomio algebráico puede ser un quadrado perfecto de cantidad representada por las mismas letras de que se componga el binomio; porque todo monomio elevado al quadrado produce solo un monomio; y el quadrado de un binomio viene siempre á ser un trinomio (§. 34).

Seria pues un error muy craso el tomar el binomio $a+b$ como equivalente á $\sqrt{a^2+b^2}$, aunque la raiz de a^2 tomada separadamente sea a; y b la de b^2; porque siendo $a^2+2ab+b^2$ el quadrado de $a+b$ contiene ademas del binomio a^2+b^2 el término $+2ab$ que no se halla en la expresion $\sqrt{a^2+b^2}$.

Todavía seria mayor el error que se cometeria en tomar el binomio $a-b$ como equivalente á $\sqrt{a^2-b^2}$; porque siendo $a^2-2ab+b^2$ el quadrado de $a-b$, este binomio equivaldrá á $\sqrt{a\ -2ab+b^2}$; y esta expresion no puede, como se ve, ser igual á $\sqrt{a^2-b^2}$.

La única simplificacion de que son susceptibles las raices de cantidades algebráicas binomias, podrá tener lugar solo en el caso en que los dos términos tengan uno ó mas factores comunes, y que estos sean quadrados. En efecto

$$\sqrt{12a^2b^4c^3+20a^3b^3c^2d}=\sqrt{4a^2b^2c^2(3b^2c+5abd)}=$$

$$2abc\sqrt{3b^2c+5abd};$$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{n^2}+\frac{a^2m}{n}}=\sqrt{\frac{a^2m^2+a^2mn}{n^2}}=$$
$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2+mn)}=\frac{a}{n}\sqrt{m^2+mn}.$$

Pasando ya á los trinomios propongámonos por exemplo extraer la raiz de

$$24a^2b^3c+16a^4c^2+9b^6$$

y teniendo á la vista el quadrado $a^2+2ab+b^2$, tratemos de hallar en el trinomio propuesto las tres partes de que débe constar el quadrado de qualquier binomio. Con este objeto ordenarémos sus términos con respecto á una de sus letras, á la letra a, por exemplo, y resultará:

$$16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6.$$

Ahora, qualquiera que sea la raiz que buscamos, en suponiéndola ordenada con respecto á la misma letra a, el quadrado de su primer término debe precisamente ser el primer término $16a^4c^2$ de la cantidad propuesta; el duplo del producto del primer término de la raiz por el segundo, debe dar el segundo término $24a^2b^3c$ de la cantidad propuesta; y por último el quadrado del último término de la raiz debe ser precisamente el último término $9b^6$ de la cantidad propuesta. Hechas estas consideraciones se dispone la operacion como aquí se ve:

$$\begin{array}{rl} \text{Quadrado...}\ 16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6 & \left\{\begin{array}{l} 4a^2c+3b^3\ \text{... Raiz} \\ \hline 8a^2c+3b^3 \end{array}\right. \\ -16a^4c^2 \qquad\qquad\qquad & \\ \hline +24a^2b^3c+9b^6 & \\ -24a^2b^3c-9b^6 & \\ \hline 0 \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Extraygamos primero (§. 112) la raiz quadrada del

primer término $16a^4c^2$, y el resultado $4a^2c$ es el primer término de la raiz, el qual se escribe á la derecha en la misma línea que la cantidad propuesta.

Quitemos de esta cantidad el quadrado $16a^4c^2$ del primer término $4a^2c$ de la raiz; y haciendo esta reduccion solo quedan los dos términos $24a^2b^3c + 9b^6$.

Debiendo ser el término $24a^2b^3c$ el duplo del producto del primer término de la raiz $4ac^2$ por el segundo, obtendrémos este segundo, dividiendo $24a^2b^3c$ por $8a^2c$, duplo de $4a^2c$; el qual duplo se escribe debaxo de la raiz. El quociente $3b^3$ es el segundo término de la raiz.

Con esto quedará determinada la raiz que nos proponíamos hallar; pero se necesita para que sea exâcta que el quadrado del segundo término componga $9b^6$; ó mas bien, que el duplo $8a^2c$ del primer término de la raiz, sumado con el segundo $3b^3$, y multiplicada la suma por el segundo, reproduzca los dos últimos términos del quadrado (§. 91); por consiguiente, al lado de $8a^2c$ escribirémos $+ 3b^3$; multiplicarémos $8a^2c + 3b^3$ por $3b^3$; y restando de los dos últimos términos de la cantidad propuesta el producto, no queda nada, y de aquí inferirémos que la raiz que buscamos es exâctamente $4a^2c + 3b^3$.

Bien se dexa ver que el mismo razonamiento y la misma serie de operaciones se pueden hacer con todas las cantidades compuestas de tres términos.

125 Quando la cantidad de que se quiera extraer la raiz, tenga mas de tres términos, la raiz deberá tener mas de dos; y suponiendo que estos sean tres, observarémos primeramente la formacion del quadrado de un trinomio para venir por este medio en conocimiento no solo de las condiciones que deben reunirse en un polino-

mio para que sea un quadrado, sino tambien del modo de averiguar su raiz.

Propongámonos, por exemplo, elevar al quadrado el trinomio $m+n+p$; y con solo representar por la letra l al binomio $m+n$, el trinomio propuesto se transformará en el binomio $l+p$; y el quadrado de este equivaldrá al de aquel. Ahora bien, el quadrado del binomio $l+p$ es $l^2+2lp+p^2$; restituyendo pues $m+n$ en lugar de l será:

$$(m+n+p)^2=(m+n)^2+2(m+n)p+p^2;$$

y siendo $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, el quadrado de $m+n+p$ vendrá á ser:

$$m^2+2mn+n^2+2(m+n)p+p^2.$$

Este resultado nos hace ver que estando ordenados los términos del polinomio que suponemos ser quadrado de un trinomio, el primer término de aquel ha de ser forzosamente el quadrado del primer término de este, es decir, de la raiz; el segundo término de aquel será el doble producto de la primera parte de la raiz multiplicada por la segunda; y de consiguiente dividiendo aquel segundo término de la cantidad propuesta por el doble del primer término que ya suponemos hallado de la raiz, el quociente deberá ser el segundo término ó la segunda parte de la misma raiz.

Conociendo entonces los dos primeros términos de la raiz que se busca, se completará el quadrado de estos dos términos, que representamos aquí por $(m+n)^2$; y quitándolo de la cantidad propuesta restará

$$2(m+n)p+p^2;$$

cuya cantidad contiene el duplo del producto del primer binomio $m+n$ por el tercer término de la raiz, mas el quadrado de este tercer término; y nos hace ver que es

necesario executar con el binomio $m+n$, que suponemos ya determinado, lo mismo que se ha hecho con el primer término m de la raiz.

Sea por exemplo la cantidad

$$64a^2bc+25a^2b^2-40a^3b+16a^4+64b^2c^2-80ab^2c;$$

y ordenando sus términos con respecto á la letra a, dispondrémos la operacion segun acabamos de indicar.

$$
\begin{array}{l|l}
16a^4-40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & 4a^2-5ab+8bc \\
\qquad\qquad\quad +64a^2bc & 8a^2-5ab \\
-16a^4 & 8a^2-10ab+8bc \\
\hline
\text{1.}^{\text{r}}\text{ resid.}-40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & \\
\qquad\qquad\quad +64a^2bc & \\
\quad +40a^3b-25a^2b^2 & \\
\hline
\text{2.}^{\text{o}}\text{ resid.}+64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2 & \\
\quad -64a^2bc+80ab^2c-64b^2c^2 & \\
\hline
\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Hecho esto, extraemos la raiz quadrada del primer término $16a^4$, y hallamos $4a^2$ para el primer término de la raiz que se busca; formamos su quadrado, y lo restamos de la cantidad propuesta.

Doblamos el primer término de la raiz, y escribimos debaxo de él el resultado $8a^2$; por el qual dividimos el término $-40a^3b$, que es el primero del primer residuo; y siendo $-5\,ab$ el quociente, venimos en conocimiento de que este es el segundo término de la raiz; lo escribimos al lado de $8a^2$; multiplicamos el todo por este segundo término, y el resultado lo restamos del primer residuo.

De este modo habrémos ya quitado de la cantidad propuesta el quadrado del binomio $4a^2-5ab$; y puesto que en la raiz debe haber algun otro término, en el se-

gundo residuo deberán exîstir el duplo del producto del binomio hallado por el tercer término que buscamos de la raiz, y el quadrado de este término. Doblamos pues la cantidad $4a^2-5ab$, y al duplo $8a^2-10ab$ lo escribimos debaxo de $4a^2-5ab$ para que sirva de divisor del segundo residuo; y efectuando la division del primer término de este por el primer término de aquel duplo, el quociente $8bc$ será el tercero de la raiz.

Lo escribimos inmediatamente al lado de $8a^2-10ab$; multiplicamos por el mismo quociente el trinomio $8a^2-10ab+8bc$, y restando del segundo residuo el producto total de aquella multiplicacion, se destruyen enteramente todos los términos; y esto nos demuestra que la cantidad propuesta es el quadrado de $4a^2-5ab+8bc$. Si despues de efectuada la tercera sustraccion quedasen aun mas términos del polinomio propuesto, seria esto indicio de que la raiz deberia tener algun otro término; y continuaríamos del mismo modo, quanto fuese necesario, la operacion, imitando lo que hemos practicado para hallar los dos últimos términos anteriores, y lo que hemos executado en la extraccion de la raiz de los números.

De la formacion de las potencias en general, y de la extraccion de sus raices.

126 Hemos visto que la resolucion de las equaciones de segundo grado dependia de una operacion aritmética, por medio de la qual retrocedíamos del quadrado á la cantidad que se habia multiplicado por sí misma para formarlo, ó á la raiz quadrada; y es fácil ver que esta operacion es un caso particular de esta otra qües-

tion general: *sabiéndose ó suponiéndose que un número dado sea una cierta potencia de otro desconocido, ¿cómo se determina quál es este otro?* Ya se dexa entender que la serie de operaciones que deberémos executar en esta investigacion, deberá ser la inversa de la que nos sirve para hallar la potencia; y de consiguiente debe sernos muy útil exâminar cómo se forma esta, para saber cómo se la deberá descomponer.

Siendo muy cómodo el uso de los símbolos algebráicos para investigar quanto pertenece á la composicion y á la descomposicion de las cantidades, procederémos desde luego á la formacion de las potencias de las expresiones algebráicas; pues para hallar las de los números basta lo que hemos dicho en el §. 24, con arreglo á lo qual hemos formado las potencias que se hallan en la tabla siguiente:

1.ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.ª	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3.ª	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4.ª	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5.ª	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6.ª	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7.ª	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Hemos puesto aquí esta tabla principalmente con el objeto de hacer notar la rapidez con que crecen las potencias de los números á proporcion que van siendo

de grado mas elevado; observacion muy importante para lo sucesivo. Se ve con efecto que la séptima potencia de 2 es ya 128, y que la de 9 asciende á 4782969.

De esto se infiere con facilidad que las potencias de las fracciones propias disminuyen con mucha rapidez; porque las potencias del denominador van siendo tanto mayores que las del numerador quanto mas elevadas sean.

La séptima potencia de $\frac{1}{2}$, por exemplo, será $\frac{1}{128}$; y la de $\frac{1}{9}$ será $\frac{1}{4782969}$.

127 Puesto que en todo producto cada letra tiene por exponente la suma de los exponentes que tenga en los dos factores (§. 26), es consiguiente que *la potencia de una cantidad monomia se forme multiplicando el exponente de cada factor por el exponente de la potencia.*

La tercera potencia de a^2b^3c, por exemplo, resultará multiplicando los exponentes 2, 3 y 1 de las letras a, b y c por el exponente 3 de la potencia que se busca; y se tendrá $a^6b^9c^3$. Con efecto esta potencia es lo mismo que

$$a^2b^3c \times a^2b^3c \times a^2b^3c = a^{2.3}b^{3.3}c^{1.3}.$$

Si la cantidad propuesta tuviese algun coeficiente numérico, seria necesario elevar tambien este coeficiente á la potencia indicada; y así la quarta potencia de $3ab^2c^5$ es $81a^4b^8c^{20}$, porque la de 3 es 81.

128 Por lo tocante á los signos que precedan á las cantidades monomias, debemos observar que *todas las potencias, cuyo exponente sea par, han de tener el signo +; y que todas las de exponente impar deben llevar el mismo signo que la cantidad que las haya formado.*

Con efecto, las potencias de un grado par resultan de la multiplicacion de un número par de factores; y

ya se sabe que los signos — combinados de dos en dos en la multiplicacion dan siempre al producto el signo + (§. 31). Por el contrario, si el exponente de la potencia, ó lo que viene á ser lo mismo, si el número de los factores fuere ímpar, el producto tendrá el signo — siempre que este signo preceda á los factores, porque en este caso se ha de terminar forzosamente la operacion multiplicando un producto positivo por un factor negativo.

129 Para retroceder de la potencia á la cantidad que la ha formado, y que se llama la *raiz*, no hay mas que invertir las reglas que acabamos de dar, es decir: 1º *Se ha de dividir el exponente de cada letra por el que indique el grado de la raiz que se quiera extraer.*

De esta manera hallarémos la raiz cúbica ó de tercer grado de la expresion $a^6b^9c^3$, dividiendo por 3 los exponentes 6, 9 y 3; lo qual dará a^2b^3c.

2.º *Quando la expresion propuesta tenga algun coeficiente numérico, se debe tomar tambien su raiz* para obtener el coeficiente de la cantidad literal que se deduzca por la regla anterior.

Si se nos pidiese, por exemplo, la raiz quarta de $81a^4b^8c^{20}$, veríamos en la tabla del §. 126 que 81 es la quarta potencia de 3, ó lo que es lo mismo, que la raiz quarta de 81 es 3; y dividiendo por 4 los exponentes de las letras, tendríamos por resultado $3ab^2c^5$.

En caso que no se pueda hallar por medio de la tabla citada la raiz del coeficiente numérico, se la extraerá por los métodos que mas adelante darémos á conocer.

130 Ya se dexa entender que la extraccion de las raices de los factores literales de las cantidades mono-

mias no se podrá efectuar sino quando cada exponente sea exâctamente divisible por el de la raiz. En no verificándose esta circunstancia, lo único que se puede hacer es indicar la operacion aritmética que habrémos de efectuar quando se sustituyan números á las letras.

Para esta indicacion se hace tambien uso del signo $\sqrt{}$; pero á fin de no confundir las raices de un grado con las de otro se escribe entre las líneas de que se forma el signo radical el exponente de la raiz que con él intentamos representar. Así quando veamos las expresiones $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a^2}$, sabrémos que la primera representa la raiz cúbica ó del tercer grado de la cantidad a; y la segunda la raiz quinta de a^2.

De qualquier grado que sean las expresiones precedidas del signo $\sqrt{}$, se las puede freqüentemente simplificar haciéndose cargo de que (§. 127) *una potencia qualquiera de un producto es el producto de las potencias del mismo grado de todos los factores de la raiz*; y que por consiguiente, *qualquiera raiz de un producto es el producto de las raices del mismo grado de todos sus factores.* De este último principio se deduce que *si la cantidad puesta debaxo del radical tiene factores que sean potencias exâctas del mismo grado que el de la raiz indicada, se podrán tomar separadamente las raices de estos factores, y multiplicar el producto de estas por la raiz indicada de los otros factores.*

En la expresion $\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}$, por exemplo, se ve

que $96 = 32 \times 3 = 2^5 \times 3$;
que a^5 es la quinta potencia de a;

que $b^7=b^5\times b^2$;

que $c^{11}=c^{10}\times c$;

y por consiguiente

$$96a^5b^7c^{11}=2^5a^5b^5c^{10}\times 3b^2c;$$

y siendo $2abc^2$ la raiz quinta del primer factor del último producto, resulta que

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}=2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}.$$

131 Debiendo llevar toda potencia de un grado indicado por número par el signo + (§. 128), ninguna cantidad precedida del signo − podrá ser potencia de grado par, ni de consiguiente podrá tener raiz de este grado. De lo qual se sigue que *todo radical de un grado par que tenga debaxo de sí una cantidad negativa, es una expresion imaginaria.* Así que

$$\sqrt[4]{-a},\ \sqrt[6]{-a^4},\ b+\sqrt[8]{-ab^7}$$

son expresiones imaginarias.

Por manera que quando el exponente del radical sea par, no se podrán designar ni exâctamente ni por aproxîmacion, ni en expresiones positivas ni en negativas, mas que las raices de las cantidades positivas, y *estas raices podrán estar precedidas indiferentemente del signo + ó del signo −,* porque en ambos casos reproducen igualmente la cantidad propuesta con el signo +; lo qual debe entenderse en el supuesto que se ignore qué signo tenia la que se supone haberla producido.

No se verifica lo mismo quando el exponente de la raiz sea impar; pues debiendo las potencias de exponente impar tener el mismo signo que sus respectivas raices (§. 128), *debe por la inversa darse á las raices de estos grados el mismo signo que preceda á la po-*

tencia; y así en tales casos se podrá designar de la raiz una expresion que no sea imaginaria.

132 Es interesante observar que la regla dada (§. 129) para la extraccion de las raices de los monomios por medio de los exponentes de sus factores conduce naturalmente á indicar con símbolos mas cómodos para el cálculo que el signo $\sqrt{}$, las raices que no se puedan extraer algebráicamente con exáctitud.

Si, por exemplo, se nos pidiese la raiz tercera ó cúbica de a^5, deberíamos, conforme á la regla citada, dividir el exponente 5 por 3; pero no pudiendo efectuarse exâctamente la division, resulta el número fraccionario $\frac{5}{3}$; y la forma que adquiere entonces el exponente del resultado indica que no se puede verificar la extraccion en el estado actual de la cantidad propuesta. Debemos pues mirar como equivalentes las dos expresiones $\sqrt[3]{a^5}$ y $a^{\frac{5}{3}}$.

Esta segunda tiene sin embargo la ventaja de conducirnos inmediatamente á la simplificacion de que es susceptible la expresion $\sqrt[3]{a^5}$; porque extrayendo el entero contenido en la fraccion $\frac{5}{3}$, tendrémos $1+\frac{2}{3}$, y por consiguiente

$$a^{\frac{5}{3}}=a^{1+\frac{2}{3}}=a^1\times a^{\frac{2}{3}}\ (\text{§. } 25);$$

donde se ve que la cantidad $a^{\frac{5}{3}}$ está compuesta de dos factores, de los quales el primero es racional, y el otro se convierte en $\sqrt[3]{a^2}$.

Lo mismo pudimos haber deducido de la expre-

sion $\sqrt[3]{a^5}$, observando lo prescrito (§. 130); pero el exponente fraccionario conduce inmediatamente á aquel resultado. Ya se nos ofrecerán en otras operaciones que hayamos de executar con las cantidades radicales, nuevas ocasiones de reconocer las ventajas de los exponentes fraccionarios.

Por ahora basta observar que correspondiendo la division de los exponentes, en los casos en que se la puede efectuar, á la extraccion de las raices; en estando meramente indicada aquella division se la debe considerar como símbolo del resultado de la misma operacion; y de consiguiente deberémos tener por equivalentes las expresiones $\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{\frac{m}{n}}$.

Así vemos de nuevo que el convenio adoptado para representar las diferentes potencias de una cantidad nos conduce por analogía y por extension á símbolos particulares, del mismo modo que segun vimos (§. 37), nos conduxo á la expresion $a^0 = 1$.

133 Observarémos con este motivo que la regla de los exponentes relativa á la division (§. 36), combinada con la de los signos relativa á la sustraccion (§. 20), nos conduce tambien á nuevas expresiones de cierta clase de fracciones algebráicas.

Con efecto, por medio de estas reglas tenemos:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

y de esto es fácil inferir que si el exponente n del denominador fuere mayor que el exponente m del numerador, será negativo en el segundo miembro el exponente de la letra a.

Por exemplo, si $m=2$ y $n=3$, tendrémos:

$$\frac{a^2}{a^3}=a^{2-3}=a^{-1};$$

y como por otra parte sepamos que simplificando la fraccion $\frac{a^2}{a^3}$ se transforma en $\frac{1}{a}$, vendrémos á concluir que son equivalentes las expresiones $\frac{1}{a}$ y a^{-1}.

En general tenemos por la regla de los exponentes $\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{-n}$; y por otra parte sabemos que $\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{a^m}{a^m\times a^n}=\frac{1}{a^n}$. Resulta pues que son equivalentes las expresiones $\frac{1}{a^n}$ y a^{-n}.

En efecto, el signo $-$ que precede al exponente n, tomado en el sentido indicado en el §. 62, manifiesta que el exponente negativo propuesto procede de una fraccion cuyo denominador contenia n factores a mas que el numerador, la qual simplificada es $\frac{1}{a^n}$. Se puede pues, en encontrando qualquiera de estas expresiones, sustituir en lugar de ella la otra.

Con arreglo á esta observacion la cantidad $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$, que es equivalente á $a^2\times b^5\times\frac{1}{c^2}\times\frac{1}{d^3}$, se puede transformar en estotra $a^2b^5c^{-2}d^{-3}$; es decir, *que se pueden transferir al numerador todos los factores del denominador con los mismos exponentes que tengan, sin otra novedad que la de estar precedidos estos del signo* $-$.

Y recíprocamente, *quando una cantidad contenga*

factores con exponentes negativos, los podrémos trasladar al denominador, dando á sus exponentes el signo +; y de esta manera la cantidad $a^2b^5c^{-2}d^{-3}$ se convierte en $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$.

De la formacion de las potencias de las cantidades complexas.

134 Observarémos ante todas cosas, que se indican las potencias de las cantidades complexas, encerrando estas cantidades dentro de un paréntesis, sobre el qual se pone á la derecha el exponente de la potencia. La expresion $(4a^2 - 2ab + 5b^2)^3$ denota la tercera potencia de la cantidad $4a^2 - 2ab + 5b^2$. La misma potencia se puede tambien indicar del modo siguiente:

$$\overline{4a^2 - 2ab + 5b^2}^{\,3}.$$

135 Siendo las cantidades binomias las mas sencillas despues de las monomias, deberán ser entre las complexas las primeras cuyas potencias nos propongamos determinar; y así como por medio de multiplicaciones sucesivas de un binomio hemos hallado (§. 34) su segunda y su tercera potencia, pudiéramos igualmente hallar por el mismo medio qualquiera otra potencia que necesitásemos del mismo binomio; pero así no obtendríamos mas que resultados particulares, como los que se hallan en la siguiente tabla:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3;$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4, \text{ \&c.}$$

la qual se podrá fácilmente continuar quanto se quiera; pero no será igualmente fácil descubrir en ella la ley que siguen los coeficientes numéricos de estos resultados. Reflexîonando sobre lo que practicamos en estas multiplicaciones, echarémos de ver que los coeficientes numéricos provienen de las reducciones que origina la igualdad de los factores què forman cada una de las potencias; y que si descubrimos algun medio de impedir estas reducciones, lograrémos poner mas en claro la ley que se observa en la composicion de estos productos.

El medio que para esto se ocurre desde luego, es suponer por un momento que sean desiguales los segundos términos de los binomios que se hayan de multiplicar, representándolos por los siguientes:

$$x+a;\ x+b;\ x+c;\ x+d, \text{\&c.}$$

Efectuando sucesivamente las multiplicaciones de dos, de tres, de quatro &c. de estos binomios, y colocando en una misma columna los términos en que se halle la primera parte x elevada á una misma potencia, tendrémos:

$$\begin{array}{llll} (x+a)(x+b)=x^2 & +ax & +ab; & \\ & +bx & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} (x+a)(x+b)(x+c)=x^3 & +ax^2 & +abx & +abc; \\ & +bx^2 & +acx & \\ & +cx^2 & +bcx & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4 & +ax^3 & +abx^2 & +abcx & +abcd. \\ & +bx^3 & +acx^2 & +abdx & \\ & +cx^3 & +adx^2 & +acdx & \\ & +dx^3 & +bcx^2 & +bcdx & \\ & & +bdx^2 & & \\ & & +cdx^2 & & \end{array}$$

&c. &c. &c.

Sin necesidad de efectuar mas multiplicaciones de estas, se puede ya venir en conocimiento de la ley con que estan formados sus productos; pues reputando por un solo término á la combinacion de todos aquellos en los quales se halle una misma potencia de la x, y que por esta razon estan colocados en una misma columna; es decir, teniendo presente que por exemplo,

$$ax^3+bx^3+cx^3+dx^3=(a+b+c+d)x^3 \ (\S.\ 11);$$

se puede ya observar en los productos que hemos hallado:

1.º Que en cada uno de ellos hay un término mas que unidades hay en el número de sus factores:

2.º Que el exponente de x *en el primer término es igual al número de los factores; y que despues va disminuyendo una unidad en cada uno de los términos que siguen:*

3.º Que la mas elevada potencia de x *no tiene otro coeficiente que la unidad; la inmediata inferior, cuyo exponente tiene una unidad*

menos, está multiplicada por la suma de los segundos términos de los binomios; la que tiene dos unidades menos en su exponente, lo está por la suma de todos los diferentes productos que se pueden obtener multiplicando de dos en dos los segundos términos de los binomios [1]; *la que tiene tres unidades menos en su exponente lo está por la suma de todos los diferentes productos que se pueden obtener multiplicando de tres en tres los segundos términos de los binomios* [2], *y así de las demas. Finalmente en el último término, que es el producto de todos los segundos términos de los binomios, y en el qual no aparece la* x, *podemos suponer que se halla esta letra con el exponente cero (§. 37), y que de consiguiente el exponente mas alto de la* x *se ha disminuido de tantas unidades como hay en el número de los factores.*

Aunque no es difícil ver que la forma de estos productos debe permanecer sujeta á las mismas leyes, qualquiera que sea el número de sus factores; se puede demostrar esta verdad de un modo mas convincente que por medio de la analogía.

136 Por decontado es evidente que todo producto de esta especie debe contener todas las potencias sucesivas de x, desde aquella cuyo exponente es igual al número de los factores que se han multiplicado, hasta aquella cuyo exponente es cero. Por manera que si representamos por m el número de factores, aquellas potencias vendrán á ser

$$x^m;\ x^{m-1};\ x^{m-2};\ \&c.\ \text{hasta}\ x^0.$$

Representemos por las letras A, B, C.........Y los respectivos multiplicadores, ó sean coeficientes de aquellas potencias, comenzando desde x^{m-1}; y como mientras permanezca indeterminado el número m de los factores, debe igualmente permanecer indeterminado el número $m+1$ de términos del producto, no podrémos designar mas términos de este que los primeros y los últimos, y tendrémos que contentarnos con indicar por medio de una serie de puntos suspensivos los demas términos intermedios que puedan fal-

1 Estos productos se llaman binarios.
2 Estos otros se llaman productos ternarios.

tar para completarlo. Así que todo el producto vendrá á tener esta forma:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Tx^2 + Ux + Y;$$

y esta expresion representará el producto de un número qualquiera m de factores $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, &c.

Ahora bien, si al producto que acabamos de suponer hallado, lo multiplicamos por otro nuevo factor $x+l$, deberá resultar una expresion de esta forma:

$$x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx^3 + Ux^2 + Yx$$

$$+ lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \ldots + lSx^3 + lTx^2 + lUx + lY$$

la qual nos hace ver:

1.° Que si A es la suma de los m segundos términos a, b, c, d &c. será $A+l$ la de los $m+1$ segundos términos a, b, c, d &c..l; y que por consiguiente si la ley indicada para la composicion del coeficiente del segundo término es verdadera en el producto del grado m, se la deberá igualmente observar en la formacion del segundo término del producto del grado $m+1$.

2.° Si es B la suma de todos los productos binarios de las m cantidades a, b, c, d &c.; $B+lA$ representará la de los productos binarios de las $m+1$ cantidades a, b, c, d &c. l; porque siendo A la suma de las primeras m cantidades, será lA la de los nuevos productos binarios que pueden formarse combinándose la nueva cantidad l con todas las anteriores; luego si la ley que hemos supuesto para la composicion del tercer término del producto es verdadera quando este sea del grado m, tambien será verdadera quando el producto sea del grado $m+1$.

3.° Si es C la suma de todos los productos ternarios de las m cantidades a, b, c, d &c., será $C+lB$ la de todos los productos ternarios de las $m+1$ cantidades a, b, c, d &c. l; pues si B representa la suma de todos los productos binarios de las m cantidades a, b, c, d &c., vendrá á ser lB la suma de todos los nuevos productos ternarios que se pueden formar combinándose la nueva cantidad l con todos los productos binarios de las anteriores; y de consiguiente si en el producto del grado m es verdadera la ley que he-

mos indicado para la composicion del coeficiente del quarto término, tambien será verdadera en el producto del grado $m+1$.

Fácilmente se ve que se puede hacer un razonamiento semejante sobre cada uno de todos los demas términos hasta llegar al último lY, el qual será el producto de los $m+1$ segundos términos siempre que Y lo sea de los m segundos términos.

De esto se deduce que pues en el producto de quatro factores, ó como dicen del quarto grado, hemos ya observado (§. 135) que el coeficiente del segundo término es la suma de las segundas partes de los factores; que el coeficiente del tercer término es la suma de todos los productos binarios de las mismas segundas partes &c.; se deberá verificar lo mismo en el producto del quinto grado, y por consiguiente en el del sexto; y así podremos ir subiendo de grado en grado hasta venir en conocimiento de que es general la ley indicada. Por manera que si al producto de un número qualquiera m de factores binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ &c. lo representamos por

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots\ldots + Tx^2 + Ux + Y,$$

será generalmente A la suma de las m cantidades a, b, c &c.; B la de todos los productos binarios de estas cantidades; C la de todos los productos ternarios de estas cantidades, y así sucesivamente.

Si no contentos con haber ya descubierto la ley de la formacion de todos los términos de esta clase de productos, quisiéremos cifrarla en una expresion algebráica, podrémos representar por Nx^{m-n} un término qualquiera del producto, y deberémos tener presente que quando sea $n=1$, el término representado será el segundo del producto, y N será la suma de las m cantidades a, b, c, d &c.; quando sea $n=2$, el término será el tercero, y N designará la suma de los productos binarios; quando sea $n=3$, el término será el quarto, y N representará la suma de los productos ternarios; quando $n=10$, el término será el undécimo, y N representará la suma de los productos *denarios*, y así sucesivamente.

137 Para hacer ahora que los productos de factores binomios que solo tienen el primer término comun

$$(x+a)(x+b);$$
$$(x+a)(x+b)(x+c);$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d), \text{ \&c.}$$

se transformen en las potencias de uno qualquiera de ellos, por exemplo, de $x+a$; ó lo que es lo mismo, en $(x+a)^2$; $(x+a)^3$; $(x+a)^4$ &c., basta suponer que todas las cantidades b, c, d &c. han venido á ser iguales á a, y sustituir por consiguiente en el producto la letra a en donde quiera que se halle qualquiera de las demas. De este modo todas las cantidades que multipliquen una misma potencia de x, serán iguales entre sí; y el coeficiente del segundo término, que en el producto de quarto grado, por exemplo,

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \text{ es } a+b+c+d,$$

se convertirá en $4a$; y siendo el del tercer término del mismo producto

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

se convertirá en $6a^2$; y de aquí es fácil inferir que el coeficiente de cada una de las diferentes potencias de x se convertirá en una sola potencia de a, repetida tantas veces quantos términos tenga en el producto aquel coeficiente, y designada por el número de factores que contenga cada término. Así el coeficiente N de la potencia x^{m-n} será la potencia a^n repetida tantas veces quantos productos diferentes se puedan formar tomando n letras de un número m de ellas; y de consiguiente á la investigacion del número de estos productos se reduce la del coeficiente numérico del término en que se halle la potencia x^{m-n}.

138 Para llegar á descubrir aquel número es necesario en primer lugar distinguir las diferentes alternaciones ó permutaciones ó situaciones que pueden tomar las letras ó factores de un producto, de los diferentes productos ó combinaciones que pueden formarse con un cierto número de letras. Con dos letras por exemplo a y b no se puede formar mas de un producto *binario*; pero sus factores son susceptibles de dos alternaciones ó permutaciones ab y ba; con tres letras a, b, c no se puede formar mas de un producto *ternario*; pero sin que varíe el valor del producto, sus factores son susceptibles de seis alternaciones ó permutaciones: abc, acb, bac, bca, cab, cba (§. 88). Con las mismas tres letras se pueden formar tres pro-

ductos binarios enteramente diferentes *ab*, *ac*, *bc*; pero si se atiende á la diferente situacion de los factores, aquellos tres productos vendrán á ser seis: *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*.

Esto basta para darnos á conocer que para determinar el número de combinaciones que se pueden formar con qualquier número de letras, es necesario atender á estas tres circunstancias: 1.ª quántas son todas las letras que se nos proponen: 2.ª de quántas ha de constar cada una de las combinaciones: 3.ª quántas son las diferentes situaciones de que en una misma combinacion ó producto son susceptibles las letras ó factores de que se compone.

Para fixar las ideas supongamos que habiéndosenos dado las nueve letras siguientes

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i,$$

se nos pregunte quántas son las combinaciones de á siete letras que, comprehendiendo las permutaciones, pueden resultar de las nueve; y por de contado nos ocurrirá que tomando arbitrariamente una combinacion de seis de estas letras, por exemplo *a b c d e f*, podrémos agregar á estas sucesivamente cada una de las tres letras restantes *g*, *h*, *i*, y de esta manera tendrémos las tres combinaciones de á siete letras:

$$abcdefg, \quad abcdefh, \quad abcdefi.$$

Lo que acabamos de decir respecto de una combinacion particular de seis letras, convendrá igualmente á todas las demas combinaciones de á seis; y de esto deberémos concluir que cada combinacion de á seis letras dará tres de á siete, esto es, tantas como letras falten para que todas estuviesen á un mismo tiempo en una sola combinacion. Luego si representamos por P el número de las combinaciones de á seis letras, tendrémos el de las combinaciones de á siete letras multiplicando P por 3 ó por $9-6$. Poniendo m y n en lugar de los números 9 y 7, y considerando á P como el número de las combinaciones que pueden formarse con m letras entrando en cada combinacion $n-1$ letras y atendiendo á las permutaciones; el número de combinaciones de á n letras que de las mismas m letras podrán resultar, deberá representarse por

$$P(m-(n-1)) \text{ ó } P(m-n+1).$$

Lo único que á primera vista parece que hemos adelantado con

esta fórmula, es haber averiguado que en sabiendo el número de productos *quaternarios*, por exemplo, que se pueden sacar de m letras, nos será fácil determinar el de los *quinarios*; en sabiendo el de los *ternarios* se determinará el de los *quaternarios*; en sabiendo el de los *binarios* determinarémos el de los *ternarios*, y así sucesivamente; porque suponiendo como suponemos conocidos los valores de m y de n, lo único que falta conocer en la fórmula es el valor de P para poder despues efectuar con las tres cantidades m, n, P las operaciones que la misma fórmula prescribe.

A fin de hacer ver que en esta fórmula estan comprehendidos implícitamente todos los casos particulares, propongámonos averiguar quántos productos binarios ó combinaciones de á dos letras se pueden formar con m letras atendiendo á las permutaciones. En este caso será $n = 2$; y para hacer uso de la fórmula deberémos tener sabido de antemano el número P de combinaciones, si así pueden llamarse, que se pueden formar con las mismas m letras, tomándolas una á una; porque en este caso $n - 1 = 1$. Ahora bien, este número $P = m$; y de consiguiente la fórmula general se transformará en $m(m - 2 + 1)$ ó $m(m - 1)$.

Ya que sabemos el número de productos *binarios*, nos será fácil determinar el de los *ternarios* con solo sustituir en la fórmula 3 en lugar de n, y $m(m - 1)$ en lugar de P. Así tendrémos:

$$m(m - 1)(m - 3 + 1); \text{ ó } m(m - 1)(m - 2).$$

Si ahora que ya sabemos el número de los productos *ternarios*, queremos averiguar el de los *quaternarios*, en la fórmula sustituirémos 4 en lugar de n, y $m(m - 1)(m - 2)$ en lugar de P, y resultará: $m(m - 1)(m - 2)(m - 4 + 1)$ ó $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$.

Del mismo modo podrémos determinar el número de productos *quinarios*, que será $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4)$; y así podrémos calcular progresivamente el número de combinaciones que se pueden formar con m letras, entrando en cada combinacion qualquier número n de ellas y atendiendo á las permutaciones. Este número, que segun hemos visto, está representado por $P(m - n + 1)$, lo estará con mas claridad por $m(m - 1)(m - 2)......(m - n + 1)$; en cuya expresion los puntos suspensivos nos dan á entender que se deben continuar los factores hasta que haya tantos como letras ha-

yan de entrar en cada una de las combinaciones, ó lo que es lo mismo, hasta que el guarismo sustractivo que forma parte de cada factor valga tantas unidades menos una, como letras hayan de entrar en cada combinacion [1].

139 Para pasar ahora del número de las combinaciones que hemos determinado de n letras, al de los productos diferentes, es decir, al de aquellas combinaciones en que no se atiende á las permutaciones, es necesario conocer de antemano el número de permutaciones ó alternaciones de que son susceptibles los factores de un mismo producto. Para esto observarémos que si en qualquiera de las combinaciones se fixa en el primer lugar una de las letras, se podrán hacer entre todas las demas tantas permutaciones quantas permita un producto de $n-1$ letras. Tomemos, por exemplo, la combinacion ó producto *abcdefg* compuesto de 7 letras; y fácilmente verémos que dexando en el primer lugar la *a*, podemos escribir este mismo producto de tantas maneras quantas sean las permutaciones de que sean susceptibles los factores del producto de seis letras *bcdefg*; y pudiendo cada una de las 7 letras ocupar el primer lugar que hemos supuesto ocupado por la *a*; es claro que si llamamos Q

1 En el número que acabamos de determinar de combinaciones, no estan comprehendidas aquellas en las quales se halla repetida muchas veces una misma letra; porque no pueden sernos útiles para el asunto de que aquí tratamos. Sin embargo, como pueden serlo para el cálculo de las probabilidades que tiene por fundamento la teoría de las combinaciones y permutaciones, observarémos en el exemplo propuesto que cada combinacion de á 6 letras *abcdef*, pudiéndose combinar de nuevo con cada una de las 9, producirá 9 combinaciones de á 7. De consiguiente si P representa el número de combinaciones de á 6, el de las de á 7 estará representado por $P\times9$, y generalmente si m es el número de todas las letras, y P el de las combinaciones en que entran $n-1$ de ellas, Pm será el número de las combinaciones, en cada una de las quales entran n letras. Siendo pues m el número de combinaciones, si así pueden llamarse, de las letras tomadas una á una, será $m\times m$ ó m^2 el de las combinaciones binarias; $m^2\times m$ ó m^3 el de las ternarias; y finalmente m^n representará el número de combinaciones que pueden formarse con m letras, entrando en cada combinacion n de ellas, y atendiendo no solo á las permutaciones de las diferentes letras que entran en cada una, sino tambien á las repeticiones de una misma letra.

el número de permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto de 6 letras, $Q \times 7$ representará el de las permutaciones de los factores de un producto compuesto de 7 letras. De aquí se sigue que si representamos por Q el número de las permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto de $n-1$ letras, Qn representará el número de las permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto de n letras.

La sencillísima fórmula Qn comprehende quantos casos particulares pueden ocurrir; porque si suponemos $n=2$, es decir, si queremos averiguar de quántas permutaciones son susceptibles los dos factores de un producto binario, en observando que quando no hay mas de una letra es $Q=1$, resulta $1 \times 2=2$ para el número de permutaciones de un producto de dos letras. Suponiendo ahora $Q=1 \times 2$, y $n=3$, tendrémos $1 \times 2 \times 3=6$ para el número de permutaciones de un producto de tres letras. Haciendo del mismo modo $Q=1 \times 2 \times 3$ y $n=4$, resultarán $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ó 24 permutaciones posibles en un producto de 4 letras, y así sucesivamente. Por manera que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n$, vendrá á ser la expresion general del número de permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto formado de n letras.

140 En habiendo comprehendido lo que acabamos de exponer, se verá con facilidad que dividiendo el número total de las combinaciones de á n letras que se pueden formar con las m letras propuestas, por el número de las permutaciones de que son susceptibles las n letras que entran en cada combinacion, el quociente será el número de los diferentes productos que se pueden hacer tomando de todas las maneras posibles n factores entre las m letras. Estará pues, bien representado este número por la expresion fraccionaria $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$, ó mas claramente por estotra .... $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \times n}$; y de consiguiente la expresion Nx^{m-n} (§. 136) se transformará en $\frac{P(m-n+1)}{Qn} a^n x^{m-n}$; ó mas bien en $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \times n} a^n x^{m-n}$;

y qualquiera de estas vendrá á ser la expresion general de qualquiera de los términos del polinomio equivalente á $(x+a)^m$. *

Estando representado por $\frac{P(m-n+1)}{Qn}a^n x^{m-n}$ un término qualquiera de aquel polinomio, el término que inmediatamente le anteceda lo deberá estar por $\frac{P}{Q}a^{n-1}x^{m-n+1}$; porque retrocediendo hácia el primer término, aumenta una unidad el exponente de x; el de a disminuye otro tanto; y ademas P y Q son las cantidades relativas al número $n-1$.

141 Si hacemos $\frac{P}{Q}=M$, se convertirán aquellos dos términos consecutivos en $Ma^{n-1}x^{m-n+1}$, y $M\frac{(m-n+1)}{n}a^n x^{m-n}$; cuyos resultados nos manifiestan cómo formarémos qualquier término del polinomio equivalente á $(x+a)^m$, por medio del que le anteceda.

En efecto, sabiendo como sabemos que el primer término es x^m, hallarémos el segundo haciendo $n=1$; y puesto que el coeficiente de x^m es la unidad, será $M=1$; y vendrá á ser el segundo término $\frac{1\times m}{1}ax^{m-1}$, ó $\frac{m}{1}ax^{m-1}$. Para pasar al tercer término harémos $M=\frac{m}{1}$, y $n=2$; lo qual da $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$. Del mismo modo hallarémos el quarto, suponiendo $M=\frac{m(m-1)}{1.2}$, y $n=3$;

* Es importante observar que haciendo sucesivamente $n=2$; $n=3$; $n=4$ &c. se convierte la fórmula $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ en $\frac{m(m-1)}{1.2}$;......... $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$; $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ &c.; expresiones que nos dan á conocer respectivamente quántos productos binarios, ternarios, quaternarios &c. se pueden formar con un número qualquiera m de letras, y de consiguiente quántos *ambos*, *ternos*, *quaternos* &c. hay en m números, ó quántas combinaciones binarias, ternarias &c. se pueden formar con m cosas qualesquiera, excluyendo las permutaciones.

de donde resulta $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}$, y así sucesivamente: por cuyo medio hallarémos la siguiente serie, conocida con el nombre de *fórmula del binomio de Newton*:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \&c.$$

de la qual se puede deducir esta regla:

Para pasar de un término al inmediato siguiente se multiplicará el coeficiente numérico por el exponente que x *tenga en aquel primero, y se le dividirá por el número que designe el lugar que ocupe el mismo término; se agregará una unidad al exponente de* a, *y se quitará otra al de* x.

Aunque no sea posible fixar el número de los términos de esta fórmula mientras no se determine el valor particular de m, no debe sin embargo quedar ya duda alguna sobre la ley que siguen todos los términos, por distantes que se los suponga del primero; por manera que

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}$$

representará del modo mas general que es posible al término que tenga antes de sí n términos.

Esta última fórmula se llama el *término general de la serie*

$$x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2 x^{m-2} + \&c.;$$

porque haciendo en ella sucesivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$ &c. resultan todos los términos de esta serie.

142 Hagamos ahora uso de la regla del párrafo anterior para desenvolver en un polinomio la quinta potencia del binomio $x+a$, ó lo que es equivalente, la expresion $(x+a)^5$. Debiendo ser el primer término

$$x^5 \text{ ó } 1a^0x^5 \text{ (§. 37);}$$

el segundo será $\frac{5}{1}a^1x^4$ ó $5ax^4$;

el tercero $\frac{5\times4}{2}a^2x^3$ ó $10a^2x^3$;

el quarto $\frac{10\times3}{3}a^3x^2$ ó $10a^3x^2$;

el quinto $\frac{10\times2}{4}a^4x^1$ ó $5a^4x$;

el sexto $\frac{5\times1}{5}a^5x^0$ ó a^5.

Aquí se termina la operacion; porque para pasar al término siguiente, en caso que lo hubiese, seria necesario multiplicar por el exponente de x en el sexto término, y ya se ve que este exponente es *cero*.

Esto mismo nos lo manifiesta la expresion ó fórmula del término general; porque teniendo el séptimo término por coeficiente numérico $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$, contiene el factor $m-5$, que en el caso actual se convierte en $5-5$ ó en 0; y como deba entrar este mismo factor en todos los términos siguientes, los hace nulos ó los reduce todos á *cero*.

Reuniendo los términos que hemos hallado mas arriba, tendrémos:

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

143 La fórmula general que hemos determinado (§. 141) puede igualmente servirnos para *desenvolver* qualquier potencia de otro qualquier binomio. Si tuviésemos, por exemplo, que formar la sexta potencia del binomio $2x^3-5a^3$; sustituyendo en aquella fórmula general 6 en lugar de m; $2x^3$ en lugar de x; y $-5a^3$ en lugar de a, se transformaria en esta expresion:

$$(2x^3)^6+6(-5a^3)(2x^3)^5+15(-5a^3)^2(2x^3)^4$$
$$+20(-5a^3)^3(2x^3)^3+15(-5a^3)^4(2x^3)^2$$
$$+6(-5a^3)^5(2x^3)+(-5a^3)^6;$$

y efectuando las operaciones que solo estan indicadas en cada uno de los términos, resultaria:

$$64x^{18}-960a^3x^{15}+6000a^6x^{12}-20000a^9x^9$$
$$+37500a^{12}x^6-37500a^{15}x^3+15625a^{18}.$$

Los términos de este polinomio son alternativamente positivos y negativos; y ya se dexa ver que lo mismo sucederá siempre que

el segundo término del binomio propuesto tenga el signo —, ó sea sustractivo.

144 A fin de facilitar la aplicacion de la fórmula general á otros innumerables casos que pueden ocurrir análogos al que acabamos de proponer, se la suele dar otra forma deducida de las observaciones siguientes:

Segun lo expuesto (§§. 36 y 133)

$$x^{m-1}=\frac{x^m}{x};\ x^{m-2}=\frac{x^m}{x^2};\ x^{m-3}=\frac{x^m}{x^3}\ \&c.;$$

y de consiguiente la fórmula general se puede transformar en esta otra:

$$x^m+\frac{m}{1}\times\frac{a}{x}x^m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\times\frac{a^2}{x^2}x^m+\&c.$$

y habiendo conseguido por medio de esta transformacion que sea comun á todos los términos del polinomio el factor x^m, se podrá escribir la fórmula de este modo:

$$x^m\left(1+\frac{m}{1}\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{a^3}{x^3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times\frac{a^4}{x^4}+\&c.\right)$$

sacando fuera de paréntesis el factor comun x^m. Para hacer ahora uso de esta fórmula es necesario primeramente *formar la serie de los números representados por las expresiones*

$$\frac{m}{1},\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4}\ \&c.;$$

multiplicar inmediatamente el primero de estos números por la fraccion $\frac{a}{x}$ *; multiplicar despues el resultado por el segundo número, y otra vez por la fraccion* $\frac{a}{x}$ *; despues este resultado por el tercer número y por la fraccion* $\frac{a}{x}$*; y así sucesivamente: reunir todos estos términos; añadirles la unidad; y últimamente multiplicarlo todo por el factor* $x.^m$

En el exemplo $(2x^3-5a^3)^6$ seria necesario escribir $(2x^3)^6$ en

lugar de x^m, y $-\frac{2a^3}{5x^3}$ en el de $\frac{a}{x}$. Dexamos al lector el cargo de efectuar el cálculo.

145 Aun para desenvolver las potencias de los polinomios puede servirnos la misma fórmula que hemos hallado para las de los binomios, con tal que sepamos dar la forma de binomio á qualquier polinomio que se nos proponga. Tratemos, por exemplo, de desenvolver la tercera potencia del trinomio $a+b+c$; y con solo suponer que $b+c=l$, vendrá á ser $a+b+c=a+l$, y de consiguiente

$$(a+b+c)^3=(a+l)^3=a^3+3a^2l+3al^2+l^3.$$

Restituyendo ahora en lugar de l el binomio $b+c$, al qual representa, tendrémos:

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3;$$

y ya entonces no faltará mas que desenvolver las potencias del binomio $b+c$, y efectuar con estas potencias las multiplicaciones indicadas en cada uno de los términos. Así tendrémos:

$$\begin{aligned}&a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\&\quad+3a^2c+6abc+3b^2c\\&\qquad\quad+3ac^2+3bc^2\\&\qquad\qquad\quad+c^3.\end{aligned}$$

La misma fórmula general que, como acabamos de hacer ver, nos puede servir para desenvolver qualquier potencia de qualquier binomio ó polinomio, quando el exponente m de la potencia sea un número entero y positivo, es igualmente aplicable aun á los casos en que m sea un quebrado propio ó impropio, ó qualquiera de las expresiones llamadas *cantidades negativas*. Esta particularidad importante necesita demostracion; pero como por ahora no pueda sernos de utilidad alguna, la remitirémos al *complemento del Algebra.*

De la extraccion de las raices de las cantidades complexas.

146 Conociendo ya el modo de componer las potencias de las cantidades complexas, pasarémos á descomponerlas, ó lo que es lo mismo, á la extraccion de

sus raices, comenzando por la raiz cúbica de los números.

Para extraer la raiz cúbica de qualquier número es necesario ante todas cosas conocer los cubos de los números dígitos, y por esta razon los presentamos en la segunda línea de la tabla siguiente:

Raic. cúbs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos.......	1	8	27	64	125	216	343	512	729

y siendo 1000 el cubo de 10, debemos inferir que mientras no esté representado por mas de tres cifras un número, su raiz cúbica no podrá estar representada por mas de una cifra.

La formacion del cubo de un número representado por una combinacion de dos cifras, se efectúa de un modo análogo á la del quadrado; porque descomponiendo el número propuesto en *decenas* y *unidades*; representando despues el número de las primeras por a y el de las segundas por b; y teniendo presente que (§. 34)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

inferirémos que *el cubo ó la tercera potencia de qualquier número compuesto de decenas y de unidades consta de quatro partes, que son: 1.ª el cubo de las decenas: 2.ª tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades: 3.ª tres veces las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades; y últimamente 4.ª el cubo de las unidades.*

Sea 47, por exemplo, el número cuya tercera potencia nos propongamos hallar; y haciendo $a = 4$ *decenas*, ó 40; y $b = 7$ *unidades*, tendrémos:

1.ª $a^3 = 64000$
2.ª $3a^2b = 33600$
3.ª $3ab^2 = 5880$
4.ª $b^3 = 343$.

Total.... $= 103823 = 47 \times 47 \times 47$.

Para retroceder ahora del cubo 103823 á su raiz 47, observarémos en primer lugar que 64000, cubo de las 4 decenas, no tiene cifras significativas de un órden inferior á los millares; podemos pues, quando busquemos el cubo de las decenas, desentendernos de las centenas, de las decenas y de las unidades del número 103823. En este supuesto, disponiendo la operacion á semejanza de lo que hemos practicado (§. 91) para la extraccion de la raiz quadrada, separarémos con una coma las tres primeras cifras de la derecha; y el mayor cubo contenido en el número 103 representado por las restantes, será el de las decenas. En la tabla anterior verémos que este cubo es 64, cuya raiz es 4; pondrémos pues 4 en el sitio destinado para la raiz; restarémos despues 64 de 103; y al lado del residuo 39 baxarémos las tres últimas cifras. El residuo total 39823 deberá contener aun las tres partes que segun la fórmula faltan para completar el cubo de qualquier binomio, á saber: *tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades*, ó $3a^2b$; *tres veces las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades*, ó $3ab^2$, *y el cubo de las unidades* ó b^3. Si supiésemos quál era el valor del producto $3a^2b$, conociendo ya como conocemos las decenas a, obtendríamos las unidades b, dividiendo aquel producto por $3a^2$. Pero aunque en realidad no conocemos el valor de $3a^2b$, sabemos sin em-

bargo que este producto no debe tener cifra alguna significativa de un órden inferior á las centenas, puesto que contiene el factor a^2 que expresa el quadrado de las decenas; no puede por consiguiente hallarse sino en la parte 398 que queda del número 39823 despues de haber separado de él las decenas y las unidades; parte que contiene ademas las centenas procedentes del triple producto $3ab^2$ de las decenas por el quadrado de las unidades y del cubo b^3 de las unidades.

Dividiendo 398 por 48 ó por 3×16, que en el exemplo propuesto viene á ser el triple del quadrado de las decenas $3a^2$, hallarémos por quociente 8. Pero no por eso hemos de creer que son 8 las unidades que buscamos de la raiz, sin executar previamente la comprobacion, formando con este número las partes del cubo que deben estar contenidas en el residuo 39823, y viendo si la suma de aquellas tres partes se puede restar de este residuo. Suponiendo pues que sea $b = 8$, será:

$$3a^2b = 38400$$
$$3ab^2 = 7680$$
$$b^3 = 512$$

total.... 46592;

y como este resultado no pueda restarse de 39823, inferirémos que el número de las unidades de la raiz debe ser menor que 8. Así que supondrémos que sea 7; y executando con este número las mismas operaciones que con el 8; y siendo exâctamente igual á 39823 la suma de las tres partes; restándolas del residuo que nos ha quedado del número propuesto, no queda nada; y así vendrémos en conocimiento de que 47 es la raiz cúbica que buscamos.

En vez de la comprobacion que acabamos de executar para ver quál de los números 8 y 7 era el de las unidades de la raiz, suelen algunos elevar inmediatamente al cubo el número representado por las dos cifras que suponemos halladas, y comparar este cubo con todo el número propuesto. Por este método hallaríamos que el cubo de 48, ó lo que es lo mismo,

$$48 \times 48 \times 48 = 110592;$$

y siendo este número mayor que el propuesto 103823 echaríamos de ver, como antes, que debe ser menor que 8 el número de las unidades de la raiz.

147 Lo que hemos executado en el exemplo anterior, puede servirnos de norma para extraer la raiz cúbica de todos los números representados por mas de tres y menos de siete cifras. En todos ellos, despues de haber separado las tres primeras cifras de la derecha, buscarémos el mayor cubo contenido en el número representado por las restantes de la izquierda: pondrémos su raiz en el sitio destinado para ella; y el cubo lo restarémos de aquella primera parte del número propuesto; á la derecha del residuo escribirémos las tres últimas cifras; separarémos las dos de la derecha, y al número representado por todas las restantes lo considerarémos como un dividendo; el divisor será el triple del quadrado de la parte que suponemos hallada de la raiz; efectuarémos la division; y antes de escribir el quociente á la derecha de la primera parte de la raiz, formarémos las tres últimas partidas del cubo de un binomio, y verémos si la suma de ellas se puede restar de todo lo que haya quedado del número propuesto despues de haberle quitado el cubo de la primera parte de la raiz; ó elevarémos al cubo el número representado por la ci-

fra hallada de la raiz y la del quociente; y verémos si este cubo se puede restar de todo el número propuesto. Si no pudiere efectuarse la una ó la otra sustraccion, vendrémos en conocimiento de que hemos dado al quociente mayor valor del que debíamos; le quitarémos pues una unidad; repetirémos la comprobacion, y así sucesivamente hasta que hallemos un resultado con el qual se pueda efectuar la sustraccion. Efectuada que sea, si no quedase residuo alguno, será esto señal de que el número propuesto es un cubo perfecto, y de que su raiz cúbica exâcta es el número representado por la combinacion de las dos cifras que ya suponemos halladas; pero si hubiese quedado algun residuo, el número que habrémos hallado no será la raiz exâcta del propuesto, sino la del mayor cubo contenido en él. En este último caso suele á veces ser tan considerable el residuo, que nos infunde rezelos de que acaso habrémos dado á la segunda parte de la raiz menos valor del que debiéramos.

Para salir de esta duda tendrémos presente que el cubo de $a+b$, quando $b=1$, es lo mismo que el de $a+1$, y tiene por expresion

$$a^3+3a^2+3a+1;$$

cantidad que excede á a^3 cubo de a, en

$$3a^2+3a+1.$$

Esto nos da á conocer que *por crecido que sea el residuo, mientras sea menor que tres veces el quadrado de la raiz hallada, mas tres veces esta misma raiz, mas la unidad, no habrá que añadir ninguna unidad á la segunda parte de la raiz.*

148 Para extraer la raiz cúbica de 105823817, observarémos en primer lugar que, sea qual fuere el número de cifras con que se haya de representar la raiz,

podemos considerarla como compuesta de unidades y decenas; y sabiendo, como sabemos, que al cubo de estas no pueden pertenecer las tres últimas cifras de la derecha, es consiguiente que deberá hallarse en 105823. Pero el cubo mayor contenido en 105823 tendrá en su raiz mas de un guarismo, y podrá por consiguiente descomponerse en unidades y decenas; y no baxando de millar el cubo de estas decenas, no podrán ser parte de él las tres últimas cifras 823. Si despues de la separacion de estas quedasen aun mas de tres cifras á la izquierda, se volverá á repetir el mismo razonamiento, y se llegará de esta manera á señalar el sitio del cubo de las unidades del órden mas elevado de la raiz que se busca, dividiendo las cifras con que esté representado el número propuesto, en trozos ó secciones de á tres guarismos, procediendo de derecha á izquierda; bien entendido que la última seccion podrá contener menos de tres cifras.

Esto supuesto, buscarémos por el método prescrito en el párrafo precedente la raiz cúbica del número representado por las dos primeras secciones de la izquierda, y hallarémos que el resultado es 47; restarémos el cubo de este número del representado por las dos primeras secciones, y á la derecha del residuo 2000 baxarémos la seccion siguiente 817; y el número 2000817 deberá

105,823,817	473
64	48
418,23	6627
1038 23	
20008,17	
1058238 17	
0000000,00	

contener las tres últimas partes del cubo de un número cuyas decenas son 47, y cuyas unidades buscamos; hallarémos pues estas unidades imitando lo que hemos

practicado en el exemplo anterior, es decir, separando las dos últimas cifras 17 de hácia la derecha; y dividiendo 20008 que queda á la izquierda por 6627, triple del quadrado de 47, nos resultará de esta division el quociente 3; y elevando al cubo el número 473, se hallará por resultado el mismo número propuesto; por manera que efectuando la sustraccion no quedará residuo alguno, y esto nos hará ver que el número propuesto es un cubo perfecto, y que su raiz cúbica exâcta es 473.

La explicacion de lo que hemos practicado en este exemplo puede servir de regla general; pues si el número propuesto hubiese tenido alguna otra seccion de cifras, se hubiera hecho con ella lo mismo que hemos executado con la tercera, y así podríamos continuar quanto fuese necesario la operacion: debiendo tener entendido que si alguno de los números que en estas operaciones parciales nos sirven de dividendos fuese menor que su respectivo divisor, deberémos poner un cero á la derecha de las cifras que hayamos hallado de la raiz; y hecho esto, baxarémos la siguiente seccion de cifras; separarémos las dos de la derecha; pondrémos dos ceros á continuacion del divisor anterior; y efectuada la division se practicará con el quociente lo mismo que con los anteriores.

149 Una vez *que se obtiene el cubo de una fraccion multiplicándola por su quadrado, ó lo que es lo mismo elevando al cubo su numerador y su denominador, es consiguiente que por la inversa se vuelva á obtener la raiz cúbica de qualquier fraccion extrayendo la del numerador y la del denominador*. Si, por exemplo, elevando al cubo el numerador y el denominador de la frac-

cion $\frac{5}{6}$ hallamos que el cubo de ella es $\frac{125}{216}$, por la inversa extrayendo la raiz cúbica del numerador y del denominador hallarémos que la raiz cúbica de $\frac{125}{216}$ es $\frac{5}{6}$; porque la de 125 es 5, y la de 216 es 6.

Esta regla es general, y la mejor que puede seguirse siempre que se sepa que son cubos perfectos el numerador y el denominador; pero quando ninguno de los dos términos sea cubo perfecto, será muy conveniente hacer que uno de ellos lo sea, multiplicando ambos términos por el quadrado de qualquiera de ellos. Por lo comun se prefiere en tal caso el multiplicar los dos términos de la fraccion propuesta por el quadrado de su denominador; porque en el denominador que resulta de esta operacion se halla el cubo del denominador primitivo; y solo falta extraer la raiz del numerador, y dividirla por el primitivo denominador. Si nos propusiésemos, por exemplo, extraer la raiz cúbica de $\frac{3}{5}$, multiplicaríamos los dos términos de esta fraccion por 25, quadrado del denominador, y tendríamos la fraccion equivalente $\frac{75}{5 \times 5 \times 5}$. Ahora, la raiz cúbica del nuevo denominador es 5; y por lo tocante á la del numerador 75, solo sabemos que es mayor que 4 y menor que 5. Si nos atenemos al 4, tendrémos que la raiz cúbica de $\frac{3}{5}$ es $\frac{4}{5}$, no exâctamente, pero sin faltarle para ser exâcta un quinto de la unidad. Para que resulte con mayor aproxîmacion será necesario aproxîmar mas á la exâctitud la raiz cúbica de 75 por los medios que darémos á conocer dentro de poco.

Quando el denominador sea desde luego un quadrado perfecto, será suficiente multiplicar los dos términos de la fraccion por la raiz quadrada del denominador. Así para hallar la raiz cúbica de $\frac{4}{9}$, multiplicarémos los

dos términos por 3, raiz quadrada de 9, y resultará la fraccion equivalente $\frac{12}{3\times3\times3}$. Extrayendo ahora la raiz del mayor cubo 8 contenido en 12, nos resultará que la raiz buscada es $\frac{2}{3}$ sin faltarle, para ser exâcta, ni un tercio siquiera de la unidad.

Aun quando no sea quadrado el denominador de la fraccion propuesta, se la puede á veces transformar en otra equivalente cuyo denominador sea cubo, sin necesidad de multiplicar los dos términos por el quadrado del denominador primitivo. Si nos propusiéramos extraer la raiz cúbica de $\frac{29}{32}$, con solo doblar los dos términos tendríamos la equivalente $\frac{58}{64}$ ó $\frac{58}{4\times4\times4}$, cuyo denominador es ya un cubo perfecto, y de consiguiente se la podrá aplicar la misma regla que á las anteriores.

150 De lo demostrado (§. 97) se sigue que la raiz cúbica de todo número que no sea un cubo perfecto, no puede ser expresada exâctamente por fraccion alguna, por grande que sea el denominador de esta fraccion: es pues una cantidad irracional, pero de una especie diferente de la raiz quadrada de un número que no sea quadrado; de manera que es absolutamente imposible designar alguna raiz quadrada incomensurable que sea igual á otra raiz cúbica de un número que no sea cubo perfecto [1].

1 Si suponiendo que b no sea un cubo perfecto, ni a un quadrado perfecto, pudiera ser $\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}$, seria $b=a\sqrt{a}$, y $\frac{b}{a}=\sqrt{a}$. Seria pues comensurable $\sqrt{a}$, contra lo supuesto.

Los principios en que se funda esta demostracion, se hallan en los §§. 164 y sig.

151 Siguiendo un método análogo al que expusimos (§. 103) para aproxîmar la raiz quadrada, podríamos igualmente aproxîmar la raiz cúbica de los números que no la tienen exâcta, valiéndonos para ello de las fracciones ordinarias; y si no nos detenemos á manifestar los fundamentos de la fórmula $b = \frac{N - a^3}{3a^2}$, que nos puede servir de norma para esta aproxîmacion, es porque ya no debe ser dificultoso el hallarla, y sobre todo porque no es nada cómodo este medio de aproxîmar la raiz.

En caso de querer hacer uso de las fracciones ordinarias para esta aproxîmacion, lo mejor es proponernos expresar la raiz en partes de una denominacion determinada, y á conseqüencia transformar el número propuesto en una fraccion equivalente cuyo denominador sea el cubo del que la raiz deba tener. Si, por exemplo, nos propusiéremos extraer la raiz cúbica de 22 expresada en quintos, ó de modo que no la falte para ser exâcta $\frac{1}{5}$ de la unidad, transformarémos el número propuesto en la fraccion equivalente $\frac{2750}{125}$, cuyo denominador es el cubo de 5; y como el número entero que mas se aproxîma á la raiz exâcta de 2750 es 14, inferirémos que $\frac{14}{5}$ ó $2\frac{4}{5}$ es la raiz cúbica de 22, aproxîmada de modo que no la falta para ser exâcta $\frac{1}{5}$ de la unidad.

152 El método que por mas cómodo es el mas usado para aproxîmar quanto se quiera á la exâctitud la raiz cúbica de un número que no sea cubo perfecto, consiste en convertir este número en fraccion decimal; bien que teniendo presente que es necesario transformarlo en milésimas para que en la raiz resulten décimas; en millonésimas para que en la raiz resulten centésimas; en milmillonésimas para que en la raiz haya mi-

lésimas &c.; porque por la inversa el cubo de qualquier número de décimas es un número de milésimas; el cubo de qualquier número de centésimas es un número de millonésimas; y en general el número de las cifras decimales del cubo es triple del de la raiz. De esto se infiere que se deben poner á la derecha de las cifras con que esté representado el número propuesto tres veces tantos ceros quantas hayan de ser las decimales que se quieran sacar en la raiz. Despues se efectuará por la regla expuesta (§. 148) la extraccion de la raiz del número representado por la nueva combinacion de cifras, y en el resultado se separará el número que se haya pedido de cifras decimales.

Si quisiéremos, por exemplo, extraer la raiz cúbica de 327, aproxîmada de modo que no la falte para la exâctitud una centésima, escribirémos seis ceros á continuacion de aquellas tres cifras, y extraerémos por la regla dada la raiz de 327000000. He aquí la operacion:

```
327,000,000  | 688
216          |------
-----------  | 108
 1110,00     | 13872
 3144 32     |
-----------
  125 680,00
 3256 60672
-----------
  13 39328
```

Se separan despues dos cifras decimales en el resultado, y será 6,88 la raiz aproxîmada que buscábamos; pero seria aun mas aproxîmada 6,89; porque aunque el cubo de este número es mayor que 327, se le aproxîma mas que el de 6,88.

Si el número propuesto tuviere ya decimales, deberémos poner á su derecha, antes de comenzar la extraccion, tantos ceros quantos sean necesarios para que el número de cifras decimales sea múltiplo de 3. Si por exemplo nos propusiéremos extraer la raiz cúbica de 0,07, escribirémos 0,070, y sacando la raiz de 70 milésimas hallarémos 0,4; y si desde luego nos hubiésemos propuesto llevar la aproxîmacion hasta las centésimas, hubiéramos puesto tres ceros mas, con lo qual habríamos tenido 0,070000; y siendo 41 el número entero que mas se aproxîma á la raiz de 70000, será 0,41 la de 0,07 con diferencia de menos de una centésima.

153 Despues de haber expuesto los medios de extraer la raiz quadrada y la raiz cúbica de los números, podrémos fácilmente deducir de la fórmula del binomio un método análogo para obtener la raiz de qualquier grado; pero antes de exponer este método, harémos algunas observaciones acerca de la extraccion de las raices, cuyo exponente es un número compuesto de dos ó mas factores.

La raiz quarta, por exemplo, se puede extraer por medio de dos extracciones sucesivas de raices quadradas; porque tomando primeramente la raiz quadrada de toda quarta potencia a^4, venimos á parar al quadrado a^2; y extrayendo de nuevo la raiz quadrada de aquel primer resultado, tendrémos a, que es justamente la raiz quarta de la cantidad primitiva a^4.

La extraccion de la raiz octava de qualquier número se podrá efectuar por medio de tres extracciones sucesivas de raices quadradas, porque representando, como nos es permitido, por a^8 el número propuesto, es fácil ver que la raiz quadrada de a^8 es a^4; que la de

a^4 es a^2; y que últimamente la de a^2 es a.

Del mismo modo se puede hacer ver que toda raiz de un grado indicado por alguno de los números 16, 32, 64 &c., y en general por alguna potencia de 2, se puede obtener por medio de una serie de extracciones de raices quadradas. Igualmente la extraccion de qualquiera raiz de un grado indicado por alguna potencia de 3 como 9, 27, 81 &c., se podrá efectuar extrayendo sucesivamente dos ó mas raices cúbicas.

Las raices cuyos exponentes sean números compuestos de potencias de 2 y de 3 se podrán reducir á raices quadradas y cúbicas; y en general, *toda raiz cuyo exponente sea un número compuesto de dos ó mas factores, podrá convertirse en dos ó mas raices, cuyos exponentes sean estos factores.* Obtendrémos, por exemplo, la raiz sexta, extrayendo primero la raiz quadrada del número propuesto, y en seguida la raiz cúbica de aquella raiz quadrada, ó *vice versa.* Para convencernos de esto bastará hacernos cargo de que executando estas operaciones con a^6, que puede representar qualquier número propuesto, hallamos primeramente a^3, y despues a; ó hallamos primeramente a^2, y despues a. Esto nos hace ver que es indiferente el órden con que debemos extraer las dos raices, en que se resuelve la sexta que nos proponíamos extraer.

154 Pasemos ahora á manifestar cómo se pueda deducir de la fórmula del binomio una regla general para extraer una raiz de qualquier grado; y para hacerlo mas perceptible supongamos que hayamos de extraer la raiz quinta de algun número. El razonamiento que vamos á hacer para resolver esta qüestion particular, cotejado con el que nos ha dirigido en la extraccion de las raices quadrada y cúbica, nos dará á conocer el modo de generalizarlo.

para manifestar cómo se deberá extraer la de qualquier grado.

Ya que hemos hallado (§. 143) la sexta potencia de $2x^3-5a^3$; propongámonos hallar la raiz sexta del polinomio que allí hemos determinado, y dispongamos la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18}-960a^3x^{15}+6000a^6x^{12}-20000a^9x^9 & \\ \qquad +37500a^{12}x^6-37500a^{15}x^3 & 2x^3-5a^3 \\ \qquad\qquad +15625a^{18} & \overline{192x^{15}} \\ -64x^{18} & \\ \hline \end{array}$$

Residuo...... $-960a^3x^{15}+$ &c.

Despues de haber ordenado con respecto á la x los términos del polinomio propuesto, debemos estar ciertos de que su primer término es la sexta potencia del primer término de la raiz ordenada del mismo modo; tomando por consiguiente la raiz sexta de $64x^{18}$, segun la regla del §. 129, tendrémos $2x^3$. Elevando este resultado á la sexta potencia, y restandola de la cantidad propuesta, el residuo debe comenzar precisamente por el segundo término del polinomio equivalente á la sexta potencia de los dos primeros términos de la raiz. Ahora, en la expresion $(a+b)^6=a^6+6a^5b+$ &c. el segundo término es el producto de seis veces la quinta potencia del primer término de la raiz por el segundo; y de consiguiente dividiéndolo por $6a^5$, el quociente será el segundo término b de la raiz.

Es preciso pues formar el producto igual á *seis veces la quinta potencia* del primer término $2x^3$ de la raiz; lo qual dará $6\times32x^{15}$ ó $192x^{15}$; y dividiendo por esta cantidad el término $-960a^3x^{15}$, con el qual comienza el residuo de la sustraccion precedente, el quociente $-5a^3$ será el segundo término de la raiz. Para comprobarlo elevaremos á la sexta potencia el binomio $2x^3-5a^3$; y siendo el resultado enteramente igual á la cantidad propuesta, restándolo de ella no quedará residuo alguno; y esto nos hará ver que la operacion está concluida.

Si aun despues de esta segunda sustraccion hubiesen quedado algunos otros términos, vendríamos en conocimiento de que la raiz deberia tener algun otro; y para hallarlo executaríamos la misma serie de operaciones que para determinar el segundo; es decir, el primer término del segundo residuo representado generalmente por

$6a^5b$ lo dividiríamos por $6(2x^3-5a^3)^5$; el quociente seria el tercer término de la raiz; y se le comprobaria formando la sexta potencia del trinomio que suponemos hallado, y restándola de la cantidad propuesta. Del mismo modo procederíamos para hallar todos los demas términos que pudiera tener la raiz, qualquiera que fuese el número de ellos.

Como el exponente 6 de la raiz sexta es producto de los exponentes 2 y 3 de las raices quadrada y cúbica, pudimos haber extraido del polinomio propuesto la raiz quadrada, y en seguida la raiz cúbica de ella, ó al contrario. Los principiantes deberán efectuar estas operaciones para familiarizarse con ellas, y para tener en la identidad del resultado final una mutua comprobacion de todas.

De las equaciones de dos solos términos.

156 Toda equacion que solo contiene una potencia de la incógnita, combinada con cantidades conocidas, puede siempre reducirse á dos solos términos, uno de los quales sea el conjunto de todos los que contienen la incógnita, siendo el otro el conjunto de las cantidades conocidas. Ya hemos visto (§. 105) tratando de las equaciones del segundo grado, un exemplo de esta reduccion, y es fácil hacerse cargo de cómo deberá executarse en las de qualquiera otro grado.

Si se nos propone, por exemplo, la equacion $a^2x^5-a^5b^2=b^4c^3+acx^5$; pasando todos los términos en que se halle x á un solo miembro, tendrémos: $a^2x^5-acx^5=b^4c^3+a^5b^2$; ó $(a^2-ac)x^5=b^4c^3+a^5b^2$. Si representamos ahora por p al binomio a^2-ac, y por q al binomio $b^4c^3+a^5b^2$, se transformará la equacion anterior en estotra $px^5=q$; y despejando la cantidad x tendrémos $x^5=\frac{q}{p}$; de donde concluirémos que $x=\sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

En general, dando, como siempre es posible, á toda

equacion de dos términos la forma de $px^m=q$, siempre se podrá deducir $x^m=\frac{q}{p}$; y por último, extrayendo la raiz del grado m de ambos miembros, resultará $x=\sqrt[m]{\frac{q}{p}}$.

157 Debemos advertir que si el exponente m fuere un número impar, la raiz no tendrá mas de un solo signo, el qual será el de la cantidad que esté debaxo del radical (§. 131); pero si fuere número par, la raiz tendrá el doble signo $\pm$; y si ademas fuere negativa la cantidad representada por $\frac{q}{p}$, la raiz será imaginaria, y nos dará á conocer, lo mismo que las de segundo grado, que es absurda la qüestion de donde haya dimanado. He aquí algunos exemplos.

De la equacion $x^5=-1024$ se deduce que $x=\sqrt[5]{-1024}=-4$; porque el exponente 5 es impar.

De la equacion $x^4=625$ se infiere que $x=\pm\sqrt[4]{625}=\pm 5$; porque es par el exponente 4.

Ultimamente, la equacion $x^4=-16$, de la qual se infiere que $x=\pm\sqrt[4]{-16}$, nos conduce á expresiones imaginarias, porque siendo par el exponente 4, es negativa la cantidad que se halla debaxo del radical.

158 Antes de pasar mas adelante harémos una observacion muy importante así para lo que resta de este tratado, como para su *complemento*, y que ademas merece por sí misma la mayor atencion; y es que todas las expresiones $x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3, y en general x^m-a^m (siendo m un número qualquiera entero y positivo) son exâctamente divisibles por $x-a$. La proposicion es evidente por lo que respecta á la primera expresion pro-

puesta; por lo que hace á la segunda sabemos (§. 34) que $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$; y por medio de la division seria fácil descomponer todas las demas. En efecto, dividiendo la expresion general $x^m - a^m$ por $x-a$, resultará por quociente $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} +$ &c. en cuyos términos irá disminuyendo siempre el exponente de x una unidad, y aumentando otro tanto el de a, hasta llegar á un término en el qual el exponente de a sea igual á $m-1$; pues entonces se terminará la operacion sin quedar residuo alguno final. En prueba de esto supondrémos que sea

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} \ldots\ldots\ldots +$$

$a^{m-2}x + a^{m-1}$; y multiplicando el segundo miembro por $x-a$, tendremos:

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} \ldots + a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x \\ \quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} \ldots - a^{m-2}x^2 - a^{m-1}x - a^m; \end{array}$$

donde se ve que todos los términos de la primera línea, excepto el primero, son respectivamente iguales á los de la segunda excepto el último; y como los de la primera sean todos aditivos, y los de la segunda sustractivos, el conjunto de unos y otros, ó lo que es lo mismo, el producto total viene á reducirse á solo el binomio $x^m - a^m$, es decir, al dividendo propuesto.

En efecto, á continuacion del término a^2x^{m-2} ha de estar precisamente en la línea superior el término a^3x^{m-3}, que queda destruido por su correspondiente en la inferior; y del mismo modo en la línea inferior se ha de hallar antes del término $-a^{m-2}x^2$ un término $-a^{m-3}x^3$ que destruye á su correspondiente en la superior. Si estos términos no estan expresamente escritos en la línea en que cada uno de ellos debe estar, es porque despues de estar bien manifiesta la ley que unos y otros siguen, es

fácil imaginarse que estan indicados por los puntos suspensivos.

159 La observacion que acabamos de hacer nos conduce á conseqüencias muy importantes, relativas á la equacion general de dos términos $x^m = \frac{q}{p}$. Representando por a el número que hallaríamos extrayendo de $\frac{q}{p}$ la raiz del grado m, vendrá á ser $\frac{q}{p} = a^m$; y la equacion primitiva se transformará en $x^m = a^m$, ó en $x^m - a^m = 0$.

Ahora bien, ya sabemos que el binomio $x^m - a^m$ es exâctamente divisible por $x - a$; por manera que suponiendo efectuada esta division podrémos sustituir en lugar de $x^m - a^m$ el producto siguiente:

$$(x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1});$$

y en lugar de la equacion fundamental $x^m - a^m = 0$ la equivalente $(x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}) = 0$. Siendo cero el segundo miembro de esta equacion, resolverla no es otra cosa que determinar el valor ó valores que sustituidos en lugar de la x, reduzcan á cero todo el primer miembro. Y como para que un producto sea cero basta que lo sea qualquiera de sus factores, es consiguiente que si ademas del valor a que reduce á cero el primer factor, exîstiesen algunos otros valores que reduzcan á cero el segundo factor, estos mismos valores satisfarán á la equacion propuesta. Para hacer ver que estos valores exîsten efectivamente, y que tienen con la unidad relaciones muy sencillas, hagamos que la equacion propuesta se transforme en otra cuyo término conocido sea la misma unidad. Esto lo conseguirémos haciendo $x = ay$; y sustituyendo $a^m y^m$ en lugar de x^m, la equacion propuesta se convertirá en $a^m y^m - a^m = 0$, ó $y^m - 1 = 0$. Por manera que en habiendo determinado los valores de y que satisfagan á esta última equacion, con solo mul-

tiplicarlos por a, tendrémos todos los valores de x que satisfacen á la propuesta.

La equacion $y^m - 1 = 0$ da inmediatamente $y^m = 1$; $y = \sqrt[m]{1} = 1$; y supuesto que $y^m - 1$ equivale á

$$(y-1)(y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots y^2 + y + 1)$$

la equacion $y^m - 1 = 0$ vendrá á ser:
$(y-1)(y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + y^2 + y + 1) = 0$; la qual nos da á conocer que todos los valores que reduzcan á cero el segundo factor del primer miembro, satisfarán á la equacion propuesta lo mismo que el que inmediatamente hemos hallado; y todos por consiguiente tienen la propiedad de que su potencia del grado m sea igual á la unidad.

De esto se infiere una conseqüencia muy singular á primera vista, y es que *la unidad puede tener muchas raices de un mismo grado ademas de ella misma.* Es verdad que estas otras raices son unos meros símbolos llamados *raices negativas ó imaginarias;* pero siendo de un freqüente uso en el analisis, convendrá darlas á conocer por lo menos en el supuesto de que el exponente m sea 2 ó 3 ó 4, que son los únicos casos en que por lo expuesto hasta ahora podemos determinarlas.

En efecto, si fuere $m = 2$, tendrémos $y^2 - 1 = 0$; y de aquí deducirémos $y = +1$; $y = -1$.

Haciendo $m = 3$, resulta $y^3 - 1 = 0$; y siendo $y^3 - 1 = (y-1)(y^2 + y + 1)$, la equacion propuesta vendrá á ser $(y-1)(y^2 + y + 1) = 0$.

Suponiendo igual á cero el primer factor, se deduce $y = 1$; pero si suponemos $y^2 + y + 1 = 0$, resolviendo esta última equacion, tendrémos $y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$;

$y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; y así los tres valores de y, ó lo que es lo mismo, las tres raices cúbicas de la unidad estarán indicadas por estas expresiones: $y=1$; $y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Aunque estas dos últimas son imaginarias, efectuando con ellas las operaciones que se practican para elevar al cubo los símbolos de las verdaderas cantidades, resultará $y^3=1$, lo mismo que si se hubiesen executado las mismas operaciones con el primer valor $y=1$.

Haciendo $m=4$ la equacion propuesta vendrá á ser $y^4-1=0$, ó la equivalente $(y-1)(y^3+y^2+y+1)=0$. Suponiendo igual á cero el primer factor, resulta $y=1$; pero suponiendo que sea $y^3+y^2+y+1=0$, no se ve desde luego cómo se podrá resolver esta equacion, por ser de tercer grado; pero si echamos de ver que (§. 34) $y^4-1=(y^2+1)(y^2-1)$, nos será fácil inferir que para satisfacer á la equacion $y^4-1=0$ podrémos suponer sucesivamente: $y^2-1=0$; $y^2+1=0$; de las quales se deducen los quatro valores siguientes: $y=+1$; $y=-1$; $y=+\sqrt{-1}$; $y=-\sqrt{-1}$. De estos quatro valores solo dos son reales, y los otros dos imaginarios; pero en todos quatro se verifica la propiedad de que elevados á la quarta potencia dan por resultado la unidad, y así tenemos las quatro raices quartas de la unidad.

Este gran número de raices de la unidad es procedente de una ley general de las equaciones, segun la qual una incógnita debe tener tantos valores como unidades haya en el mas alto exponente que ella tenga en

la equacion de que nos valgamos para determinarla, ó lo que es lo mismo, en el exponente que designa el grado de la equacion; y quando la qüestion no admite tantas soluciones reales, se completa el número de los valores de la incógnita con símbolos puramente algebráicos, que sometidos á las operaciones indicadas en la equacion producen el resultado que ella requiere: por manera que todos estos valores satisfacen á la equacion, aunque no satisfagan al problema.

Si, como hemos propuesto, las tres equaciones $y^2 - 1 = 0$; $y^3 - 1 = 0$; $y^4 - 1 = 0$, y deducido de ellas las dos raices quadradas, las tres raices cúbicas y las quatro raices quartas ó *quadro-quadradas* de la unidad, nos hubiésemos propuesto las tres equaciones $x^2 - a^2 = 0$; $x^3 - a^3 = 0$; $x^4 - a^4 = 0$; seria fácil deducir de la primera de estas las dos raices quadradas de a^2; de la segunda las tres raices cúbicas de a^3; y de la tercera las quatro raices quartas de a^4. En efecto, multiplicando por a las dos raices quadradas de la unidad, tendrémos las dos raices quadradas a y $-a$ del número conocido representado por a^2. Del mismo modo, multiplicando por a las tres raices cúbicas de la unidad, resultarán a; $a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$; $a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$; es decir, las tres raices cúbicas del número conocido representado por a^3. Ultimamente, multiplicando por a las quatro raices quartas de la unidad, resultarán las quatro raices quartas a; $-a$; $a\sqrt{-1}$; $-a\sqrt{-1}$ de la cantidad representada por a^4.

De aquí se sigue que las raices de los números tienen dos especies de expresiones ó valores; á la pri-

mera especie, que llamarémos *determinacion aritmética*, pertenece el número que se halla por los métodos expuestos en el §. 154; el qual no es mas de uno en cada caso particular, y es el que en los tres casos precedentes hemos representado por a. A la segunda, que comprehende los valores negativos y las expresiones imaginarias, la designarémos con el nombre de *determinaciones algebráicas*, porque deben su exîstencia á la aplicacion que se ha hecho de las reglas de los signos del álgebra aun á símbolos que no representan cantidades.

De las equaciones que se pueden resolver como las de segundo grado.

160 El carácter de estas equaciones consiste en que no contienen mas de dos distintas potencias de la incógnita, y que el exponente de la una es doble del exponente de la otra. Todas ellas se pueden representar por la siguiente fórmula general:

$$x^{2m}+px^m=q,$$

en la qual estan designadas por p y q las cantidades conocidas.

Mirando primeramente como incógnita la potencia x^m, ó lo que viene á ser lo mismo, si hacemos $x^m=u$, vendrá á ser $x^{2m}=u^2$; y la fórmula general propuesta se transformará en estotra: $u^2+pu=q$; de la qual se deduce (§. 109) $u=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; y restituyendo x^m en lugar de u, tendrémos: $x^m=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; equacion de dos solos términos, puesto que indicando

la expresion $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ operaciones que se han de executar con cantidades conocidas, y que ya sabemos efectuar, podemos mirar el resultado de ellas como una sola cantidad conocida.

Representando por a y por a' los dos valores de esta última cantidad, la fórmula $x^m=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ se descompondrá en estotras dos: $x^m=a$; $x^m=a'$; de las quales se deducen los dos siguientes valores de la incógnita: $x=\sqrt[m]{a}$; y $x=\sqrt[m]{a'}$; bien que si el exponente m fuere número par, se deducirán no solo dos, sino quatro valores de la incógnita, porque en tal caso á cada uno de los dos radicales se le antepondrá el doble signo $\pm$, y las dos últimas fórmulas se descompondrán en estas quatro:

$$x=+\sqrt[m]{a}\,;\quad x=+\sqrt[m]{a'}\,;\quad x=-\sqrt[m]{a}\,;\quad x=-\sqrt[m]{a'}.$$

Estos quatro valores serán todos reales siempre que sean positivas las cantidades representadas por a y a': serán todos imaginarios si fueren negativas las mismas cantidades; ó dos de ellos serán reales y los otros dos imaginarios, si la cantidad a fuese positiva y la a' negativa, ó al contrario.

Todos estos valores de la x pueden comprehenderse en una sola fórmula, indicando inmediatamente la raiz de los dos miembros de la equacion $x^m=-\frac{2}{1}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; de la qual se deduce $x=\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$.

La qüestion siguiente conduce á una equacion de esta especie.

161 *Descomponer el número 6 en dos factores tales que la suma de sus cubos sea 35.*

Si representamos por x uno de los factores desconocidos, el otro será $\frac{6}{x}$; y siendo sus cubos x^3 y $\frac{216}{x^3}$, la equacion fundamental de la qüestion será:

$$x^3+\frac{216}{x^3}=35;$$

de la qual se deducen estotras:

$$x^6+216=35x^3;$$
$$x^6-35x^3=-216.$$

Si ahora consideramos como incógnita á x^3, obtendrémos por la regla de las equaciones de segundo grado

$$x^3=\frac{35}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{35}{2})^2-216};$$

efectuando los cálculos numéricos indicados, hallarémos: $(\frac{35}{2})^2=\frac{1225}{4}$; $\sqrt{(\frac{35}{2})^2-216}=\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{19}{2}$, y por consiguiente $x^3=\frac{35}{2}\pm\frac{19}{2}$; en donde se hallan reunidas las dos siguientes expresiones: $x^3=\frac{35}{2}+\frac{19}{2}=\frac{54}{2}=27$; $x^3=\frac{35}{2}-\frac{19}{2}=\frac{16}{2}=8$; y de estas es fácil concluir que

$x=\sqrt[3]{27}=3$, y que $x=\sqrt[3]{8}=2$.

El primer valor de la x da $\frac{6}{3}$ ó 2 para el segundo factor, al paso que el segundo valor conduce á $\frac{6}{2}$ ó 3; son pues en un caso 3 y 2 los factores que buscábamos, y en el otro 2 y 3. Estas dos soluciones solo se diferencian en la mera inversion del órden de los factores del número dado 6.

162 Como las equaciones que acabamos de considerar no deben estar exêntas de la ley general de que hemos hablado (§. 159), deberémos multiplicar los va-

lores aritméticos de $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[m]{a'}$ por las m raices que la unidad debe tener en el grado m.

Así que despues de haber determinado los valores aritméticos 3 y 2 equivalentes á los radicales $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[3]{8}$ que resultaron de la equacion $x^6 - 35x^3 = -216$, multiplicarémos cada uno de ellos por las tres raices cúbicas de la unidad, y tendrémos las seis raices siguientes:

1.ª... $x = 1 \times 3$;   2.ª... $x = 1 \times 2$;

3.ª... $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 3$; 4.ª... $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 2$;

5.ª... $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 3$; 6.ª... $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 2$;

de las quales solo las dos primeras son reales y positivas, y las únicas que resuelven el problema.

Del cálculo de las cantidades radicales. *

163 El gran número de casos en que no se pueden extraer exâctamente las raices, y lo penoso de la operacion que es necesario executar para obtenerlas con la aproxîmacion suficiente, han sido motivos para que los algebristas hayan procurado representar los resultados de las operaciones que debieran executarse con las raices extraidas, sin detenerse á extraerlas préviamente como á primera vista podria parecer necesario. De este

* Llámanse así las raices indicadas ó representadas por un signo radical antepuesto á la cantidad cuya raiz deba extraerse. Quando dos ó mas signos radicales tienen un mismo exponente, y es una misma la cantidad que se halla debaxo de ellos, las raices indicadas se llaman *cantidades radicales semejantes*; pero en faltando qualquiera de las dos condiciones, se las llama *desemejantes*.

modo difieren la extraccion hasta el fin del cálculo, y no la efectuan mientras no han simplificado quanto sea posible los resultados; y así logran que la operacion mas complicada y difícil no se deba executar sino con los números mas pequeños ó con las expresiones mas sencillas que las qüestiones propuestas permitan.

La adicion y la sustraccion de las cantidades radicales desemejantes solo se pueden indicar por los signos + y −. Por exemplo, las sumas representadas por los binomios $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, y las diferencias ó residuos representados por $\sqrt[3]{a}-\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ no pueden admitir otra expresion mas sencilla, á lo menos mientras los símbolos algebráicos permanezcan en toda la indeterminacion que les es propia; pero no sucede así con $4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b}$, porque los radicales que componen este trinomio pueden hacerse semejantes por medio de la simplificacion indicada en el §. 130. En efecto, $\sqrt[3]{16a^3b}$ equivale á $\sqrt[3]{8a^3\times 2b}$, ó á $\sqrt[3]{8a^3}\times\sqrt[3]{2b}$, ó á $2a\sqrt[3]{2b}$; el tercer radical $\sqrt[3]{2a^6b}$ equivale á $\sqrt[3]{a^6\times 2b}=\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{2b}$ $=a^2\sqrt[3]{2b}$; y por consiguiente el trinomio propuesto se transformará en

$$4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}-\frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b};$$

ó en $(4a+2a-\frac{5a^2c}{ad})\sqrt[3]{2b}=(6a-\frac{5ac}{d})\sqrt[3]{2b}=$

$$(6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

164 Por lo que respecta á las demas operaciones estriba el cálculo de los radicales sobre este principio ya citado: *Elevar á una misma potencia los diferentes factores de un producto equivale á elevar el producto á la misma potencia.* Se debe ademas tener presente que *la mera supresion del signo radical equivale á elevar la raiz que con él estaba indicada, á la potencia del mismo grado que la raiz.* Si, por exemplo, en vez de $\sqrt[7]{a}$ escribimos solo a suprimiendo enteramente el signo radical, habrémos con esta mera supresion elevado á la séptima potencia la raiz séptima de a, que estaba representada por la expresion primitiva $\sqrt[7]{a}$; porque si despues de haber extraido de qualquier cantidad una raiz qualquiera, elevamos esta raiz á la potencia del mismo grado, debe resultar la cantidad primitiva; y como $\sqrt[7]{a}$ representa el resultado de la primera operacion, a deberá ser el de la segunda.

Sentado esto, si suprimimos los signos radicales de la expresion $\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}$, por exemplo, habrémos elevado á la séptima potencia los dos factores de un producto; y el resultado ab será la séptima potencia del producto indicado. Tomando pues la raiz séptima, hallarémos que $\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}=\sqrt[7]{ab}$.

Este razonamiento, aplicable á qualquiera otro caso, nos manifiesta que *para multiplicar dos expresiones radicales de un mismo grado debemos efectuar la multiplicacion de las cantidades que se hallen debaxo de los signos radicales, y anteponer al producto un signo radical del mismo grado.* Lo qual nos viene á decir que

extraer sucesivamente las raices de un mismo grado de los diferentes factores de un producto equivale á extraer la raiz del mismo grado de todo el producto.

Mediante esta regla tendrémos:

$$3\sqrt{2ab^3}\times 7\sqrt{5a^3bc}=21\sqrt{10a^4b^4c}=$$
$$21a^2b^2\sqrt{10c};$$

$$4\sqrt{a^2-b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}=\ 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=$$
$$4\sqrt{a^4-b^4};$$

$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}}\times\sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}=$$
$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}\times\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}=$$
$$\sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4}\times\frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)}=$$
$$\sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2}\times\frac{(2a^6-b^6)}{a^2-b^2}};$$

por ser $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.

165 Teniendo presente que la séptima potencia de la expresion $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, por exemplo, es $\frac{a}{b}$, inferirémos, tomando la raiz séptima de este último resultado, que $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}=\sqrt[7]{\frac{a}{b}}$; de donde se sigue: *que para dividir una por otra dos cantidades radicales de un mismo grado, es necesario representar el quociente de las cantidades que se hallan debaxo de los radicales, y anteponerle un solo signo radical del mismo grado.* Lo qual

quiere decir que *lo mismo es executar primeramente una division, y extraer una raiz qualquiera del quociente, que extraer primeramente las raices del mismo grado del dividendo y del divisor, y concluir dividiendo la raiz del primero por la del segundo.* En suma, la inversion en el órden de estas operaciones no produce alteracion alguna en el resultado final de ellas.

Por esta regla hallamos que

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{6ab}{3a}}=\sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\sqrt{a-b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}.$$

166 De la regla de la multiplicacion de las cantidades radicales de un mismo grado (§. 164) se sigue que *para elevar una cantidad radical á una potencia no se necesita mas que elevar á esta potencia la cantidad puesta debaxo del radical, y anteponer al resultado el mismo signo radical;* porque elevar, por exemplo, á la tercera potencia la cantidad representada por $\sqrt[5]{ab}$ es lo mismo que hallar el producto de la multiplicacion que aquí indicamos: $\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab}$; y como por ser de un mismo grado los radicales debamos (§. 164) multiplicar entre sí las cantidades que estan debaxo de

ellos, y anteponer el mismo signo radical al producto, el resultado será $\sqrt[5]{a^3b^3}$.

Del mismo modo, la cantidad $\sqrt[7]{a^2b^3}$ elevada á la quarta potencia da $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, que se reduce á $ab\sqrt[7]{ab^5}$ descomponiendo a^8b^{12} en $a^7b^7 \times ab^5$, y extrayendo (§. 130) la raiz séptima del factor a^7b^7.

Es muy digno de notarse que quando el exponente del radical es exâctamente divisible por el de la potencia á que se haya de elevar la cantidad propuesta, se efectúa la operacion con solo dividir el exponente del radical por el de la potencia. El quadrado, por exemplo, de $\sqrt[6]{a}$; ó $(\sqrt[6]{a})^2 = \sqrt[3]{a}$; porque $\frac{6}{2} = 3$.

Con efecto $\sqrt[6]{a}$ representa una cantidad que es seis veces factor de a; y como la cantidad $\sqrt[3]{a}$ que hemos obtenido dividiendo el exponente 6 por 2, sea solo tres veces factor de la misma a, es consiguiente que $\sqrt[3]{a}$ equivalga al producto de dos de los primeros factores, ó lo que es lo mismo, al quadrado ó la segunda potencia de uno de estos factores ó de $\sqrt[6]{a}$.

El mismo razonamiento se puede aplicar al exemplo que sigue, y á otro qualquiera: $\left(\sqrt[12]{a^2b}\right)^3 = \sqrt[4]{a^2b}$.

167 Invirtiendo las reglas del artículo precedente resultan las que deberémos seguir para la extraccion de las raices de las cantidades radicales.

En efecto, de la primera se deduce sin la menor di-

ficultad, *que si los exponentes de los factores que estan debaxo del radical son exâctamente divisibles por el de la raiz que se quiera extraer, se efectuará la operacion como si no hubiese radical alguno, y al resultado se le antepondrá el radical primitivo.*

Así es, por exemplo, que $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4 b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4 b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}$.

De la segunda regla del párrafo precedente se infiere igualmente que *se representa en general qualquiera raiz de cantidades radicales, multiplicando el exponente del radical por el de la raiz que se quiera extraer.*

Por esta última regla se halla que $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

Con efecto, $\sqrt[5]{a^4}$ es una cantidad que es cinco veces factor de a^4 (§§. 24 y 129); pero como por otra parte la raiz cúbica de $\sqrt[5]{a^4}$ deba ser tres veces factor de esta última cantidad, es consiguiente que $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}$ deba ser 3×5 veces ó 15 veces factor de la primitiva cantidad a^4: luego $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Del mismo modo se probará que $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a^4}$; lo qual nos da á conocer que *lo mismo es extraer primeramente la raiz quinta de una cantidad qualquiera, y extraer despues la raiz cúbica de aquella raiz quinta, que extraer primeramente la raiz cúbica de la cantidad primitiva, y concluir por la extraccion de la raiz quinta de la cúbica:*

el resultado final no varía por esta inversion en el órden de las operaciones. Lo mismo puede demostrarse de otras raices qualesquiera.

168 Supuesto que multiplicando por qualquier número el exponente de una cantidad que está debaxo de un radical (§. 166), se eleva la raiz que con este signo estaba representada, á la potencia que indique aquel multiplicador; y que multiplicando por el mismo número el exponente del radical (§. 167) se extrae del resultado anterior la raiz del grado indicado por el mismo multiplicador, es consiguiente que esta segunda operacion restituya á su primitivo estado la cantidad propuesta. Lo que esto quiere decir en suma es, que *multiplicando por un mismo número el exponente del radical y el de la cantidad que esté debaxo de él, no se altera el valor de la expresion.*

La expresion $\sqrt[5]{a^3}$, por exemplo, puede convertirse en $\sqrt[35]{a^{21}}$, multiplicando por 7 los exponentes 5 y 3; y la segunda expresion es enteramente equivalente á la primera, porque multiplicar por 7 el exponente de a^3, y formar el radical $\sqrt[5]{a^{21}}$ es hallar la séptima potencia del radical propuesto; y multiplicar por 7 el exponente 5 del radical $\sqrt[5]{a^{21}}$, es tomar la raiz séptima de este primer resultado; deshacemos pues con la segunda operacion lo que habíamos hecho con la primera.

169 Por medio de esta doble multiplicacion *se reducen á un mismo grado ó exponente dos, tres ó mas radicales de diferentes grados, multiplicando á un mismo tiempo el*

exponente de cada radical y el de la cantidad á que esté antepuesto, por el producto de los exponentes de todos los demas radicales. La identidad de los nuevos exponentes de los radicales es evidente por sí misma, puesto que todos ellos vendrán á ser el producto de todos los exponentes de los radicales primitivos; y segun lo que acabamos de demostrar, no habrá mudado de valor ninguna de las cantidades radicales propuestas, por haber multiplicado por un mismo número el exponente del radical y el de la cantidad que primitivamente se halle debaxo de él.

Por esta regla se transforman las cantidades radicales $\sqrt[5]{a^3b^2}$ y $\sqrt[7]{c^4d^3}$ en $\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}$ y $\sqrt[35]{c^{20}d^{15}}$; asimismo las cantidades radicales $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[5]{a^2c^3}$ y $\sqrt[7]{b^4c^3}$ se convierten respectivamente en $\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}$, $\sqrt[105]{a^{42}c^{63}}$ y $\sqrt[105]{b^{60}c^{45}}$.

Esta transformacion es análoga á la reduccion de los quebrados á un comun denominador, y de consiguiente es susceptible de las mismas abreviaciones que ella (*Arit.* §. *81.*)

Si hubiese coeficientes numéricos debaxo de los radicales será necesario elevarlos á la potencia indicada por el producto de los exponentes de los demas radicales.

170 Tambien se infiere fácilmente que *dividiendo por un mismo número el exponente del radical y el de la cantidad que esté debaxo de él, no mudará por eso el valor de la expresion.* Así tendrémos una nueva transformacion de las expresiones radicales análoga á la de reducir los quebrados á sus mínimos términos ó á su mas sencilla expresion. Ultimamente, *se puede introducir de-*

baxo de un radical qualquiera un factor que esté fuera de él, elevándolo á la potencia indicada por el exponente del radical, y multiplicando por esta potencia la cantidad que primitivamente estaba debaxo.

Se convertirá, por exemplo, a^2 en $\sqrt[5]{a^{10}}$; y $2a\sqrt[3]{b}$ en $\sqrt[3]{8a^3b}$.

171 Despues de haber reducido á un mismo exponente ó grado qualesquiera radicales por medio de la transformacion precedente, se les aplicarán sin dificultad alguna las reglas dadas (§§. 164 y 165) para la multiplicacion y la division de las cantidades radicales de un mismo grado.

Propongámonos, por exemplo, simplificar el producto representado por $\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s}$; y en primer lugar transformarémos los factores $\sqrt[m]{a^pb^q}$ y $\sqrt[n]{b^rc^s}$ en $\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}$ y $\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}$; y por la regla del §. 164 hallarémos que

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}$$

es el producto de los radicales propuestos.

Hallarémos tambien por la regla del §. 165 que

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq}}{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-}}{c^{ms}}}$$

Advertencias sobre algunos casos singulares que ocurren en el cálculo de las cantidades radicales.

172 Las reglas que acabamos de prescribir para el cálculo de las cantidades radicales, se aplican sin dificultad á los símbolos de las verdaderas cantidades, ó sea á las cantidades reales; pero aplicadas á las que se llaman cantidades imaginarias, nos podrian inducir á error si no hiciésemos algunas advertencias deducidas de las propiedades de las equaciones de dos solos términos.

Si nos propusiésemos, por exemplo, elevar al quadrado la expresion $\sqrt{-a}$, y observásemos á la letra la regla prescrita (§. 164) para la multiplicacion de las cantidades radicales, hallaríamos $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{-a\times-a}=\sqrt{a^2}$; y si ahora nos contentásemos con tomar $+a$ en lugar de $\sqrt{a^2}$, habríamos venido á parar á un resultado evidentemente falso, porque el quadrado de $\sqrt{-a}$ debe obtenerse con suprimir el signo radical, y es por consiguiente $-a$.

Bezout ha desatado perfectamente esta dificultad observando que quando ignoramos cómo se haya formado el quadrado a^2 y se nos pide su raiz, debemos indicar igualmente $+a$ y $-a$, porque no sabemos con quál de éstas dos expresiones se efectuó la multiplicacion; pero quando sabemos de antemano quál de estas cantidades se ha multiplicado por sí misma para formar a^2, entonces ya no se puede dudar de quál sea su raiz, ni menos tomar la una por la otra. Este caso es eviden-

temente el de la expresion $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, pues se sabe aquí que la cantidad a^2 que está debaxo del radical en el producto $\sqrt{a^2}$, procede de $-a$ multiplicada por $-a$, y por consiguiente no debe quedarnos la menor duda de que su raiz es $-a$, y no $+a$. Así como por la inversa, quando multiplicamos $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, su producto $\sqrt{a^2}$ se reduce á $+a$; y no nos es permitido tomar $-a$ por equivalente á $\sqrt{a^2}$, porque sabiendo como sabemos que el quadrado a^2 ha provenido de la multiplicacion de $+a$ por $+a$, no podemos dudar de que la raiz quadrada de a^2 es en este caso particular $+a$, y de ningun modo $-a$. En suma, lo único que la equacion idéntica $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2}$, rectamente traducida, nos quiere decir, es que *el quadrado de* $\sqrt{-a}$ *es una de las raices quadradas de* a^2; pero no qualquiera de ellas, sino sola y determinadamente $-a$.

Estos razonamientos no dexan duda alguna sobre el verdadero resultado de la operacion en el caso particular que acabamos de considerar; pero aun hay algunos otros en los quales, para determinar el resultado, nos es forzoso acudir á las propiedades de las equaciones de dos solos términos.

173 Si se nos pidiese, por exemplo, el producto de $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$, reduciríamos el segundo radical al mismo grado que el primero (§. 169), y tendríamos $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a}$; resultado

real, aunque es bien claro que la cantidad real $\sqrt[4]{a}$, multiplicada por la expresion imaginaria $\sqrt{-1}$, debe dar un producto imaginario. Sin embargo, no debemos creer que la expresion $\sqrt[4]{a}$, que hemos hallado por producto de la multiplicacion propuesta, sea enteramente falsa, sino tan solo que por lo comun no se la da el verdadero sentido que debe tener. Lo único que nos dice la equacion idéntica $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt[4]{a}$ es que *multiplicando por $\sqrt{-1}$ una de las quatro raices quartas de* a, *resulta otra de las mismas raices quartas de* a.

Con efecto, considerando $\sqrt[4]{a}$ algebráicamente, y como que es la expresion de la incógnita x en la equacion de dos solos términos $x^4 - a = 0$, echarémos fácilmente de ver que es susceptible de quatro diferentes determinaciones (§. 159); porque si representamos por α el número que inmediatamente resulta de la extraccion de la raiz quarta de a, ó el que hemos llamado la *determinacion aritmética* de esta raiz quarta, vendrá á ser $a = \alpha^4$; y las quatro raices quartas de a se hallarán multiplicando α por las quatro raices quartas de la unidad. Serán pues: $\alpha \times +1$; $\alpha \times -1$; $\alpha \times +\sqrt{-1}$; $\alpha \times -\sqrt{-1}$; y de consiguiente si en el primer miembro de la equacion $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt[4]{a}$ la expresion $\sqrt[4]{a}$ quiere decir α, en el segundo vendrá á significar $\alpha\sqrt{-1}$; por manera que la verdadera traduccion de la equacion propuesta es la siguiente: *multiplicando por $\sqrt{-1}$ la primera raiz quarta de* a, *resulta la tercera raiz quarta de la misma cantidad* a.

Basta un poco de atencion para descubrir el orígen de la duda que ha motivado el producto que hallamos por la regla del §. 169. La segunda potencia $+1$ de la expresion -1 que estaba debaxo del radical quadrado, puede muy bien proceder de $+1 \times +1$ igualmente que de -1×-1, y hace que la expresion $\sqrt[4]{1}$ pueda admitir mas determinaciones que la expresion $\sqrt{-1}$.

En general, quando las expresiones algebráicas que forman los dos miembros de una equacion sean susceptibles de diferentes valores, la equacion no quiere siempre decir que qualquiera de los valores de su primer miembro es igual á otro qualquiera de los del segundo; sino que alguno de aquellos es igual á otro de estos. Sabemos por exemplo que, algebráicamente hablando, á la expresion $\sqrt[3]{8}$ corresponden estos tres valores:

$$2;\ -1+\sqrt{-3};\ -1-\sqrt{-3};$$

que á la expresion $\sqrt[4]{16}$ corresponden estos quatro:

$$2;\ -2;\ 2\sqrt{-1};\ -2\sqrt{-1};$$

y sin embargo la equacion $\sqrt[3]{8} = \sqrt[4]{16}$ no nos quiere decir otra cosa sino que el primero de aquellos tres valores es igual al primero de estos quatro; y solo en este sentido es verdadera *.

Lo que hemos practicado para venir en conocimiento

* El lenguage algebráico nos parece en esta parte expuesto á los mismos inconvenientes que los idiomas que carecen de artículos. Quando en el latino se nos dice: *Regis filius est exercitûs dux*, las circunstancias en que se enuncie esta proposicion son las únicas que pueden determinar su verdadero sentido.

de la regla de que hacemos uso para formar el producto $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}$, se reduce á elevar este producto á la potencia mn; porque si lo hubiéramos representado por z, ó lo que es lo mismo, si hubiéramos hecho $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=z$; elevando primeramente á la potencia m los dos miembros de esta equacion, tendríamos $a\sqrt[n]{b^m}=z^m$; y elevando despues á la potencia n los dos miembros de esta última, resultaria $a^nb^m=z^{mn}$.

Así tendríamos ya conocido, no el producto que buscábamos, sino su potencia del grado mn; ó lo que es lo mismo, tendríamos una equacion de este grado con dos solos términos, y en la qual la incógnita, que en este caso representa el producto que buscábamos, deberia tener, generalmente hablando, mn determinaciones (§. 159). Esto se concibe con facilidad atendiendo á que los factores $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ son las expresiones de los valores que corresponden á las incógnitas x é y en las siguientes equaciones de dos solos términos: $x^m-a=0$; $y^m-b=0$; y siendo por consiguiente la x susceptible de m determinaciones, y la y de n determinaciones, se podrán obtener mn determinaciones del producto pedido, combinando cada una de las m determinaciones de x con cada una de las n determinaciones de y.

Quando sean reales las cantidades que se han de multiplicar, no ocurrirá dificultad alguna en la eleccion, porque el número de determinaciones de esta especie jamas pasa de dos (§. 157), que solo se diferencian en el signo.

174 Haciendo uso de la transformacion de que

nos hemos valido (§. 159), conseguirémos en todos casos que recayga toda la dificultad sobre las raices de + 1, ó de − 1; porque suponiendo $x = \alpha t$; é $y = \beta u$, indicando con α y β las determinaciones numéricas de $\sqrt[m]{a}$, y $\sqrt[n]{b}$ sin atender al signo, se convierten las equaciones $x^m \mp a = 0$; $y^n \mp b = 0$; en $t^m \mp 1 = 0$; $u^n \mp 1 = 0$; y se halla la expresion $xy = \sqrt[m]{\pm a} \times \sqrt[n]{\pm b} = \alpha\beta \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[n]{\pm 1}$; en la qual $\alpha\beta$ representa el producto de los números $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ó la determinacion aritmética de la raiz del grado mn del número $a^n b^m$.

Quando se haya de particularizar el producto de los radicales $\sqrt[m]{\pm a}$ y $\sqrt[n]{\pm b}$, por razon de estar determinados los grados de las cantidades radicales que son factores, será necesario hallar por medio de las equaciones $t^m \mp 1 = 0$, y $u^n \mp 1 = 0$ las diferentes expresiones de $\sqrt[m]{\pm 1}$ y $\sqrt[n]{\pm 1}$, y combinarlas como corresponda.

Por fortuna son raras las veces en que hay necesidad de efectuar estas operaciones, á no ser en algunos casos muy sencillos. He aquí algunos de los que ocurren con mas freqüencia:

1.°.... $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} (\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$;

y suprimiendo el radical de $\sqrt{-1}$, obtendrémos:

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

2.°.... $\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \, (\sqrt[4]{-1})^2$.

Para evitar en este caso la duda de que hablamos (§. 173), no multiplicarémos − 1 por − 1; sino observarémos que el quadrado de la raiz quarta de qualquier

cantidad equivale á la raiz quadrada de la misma cantidad, y así tendrémos:

$$\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}\times\sqrt{-1}.$$

3.°.... $\sqrt[6]{-a}\times\sqrt[6]{-b}=\sqrt[6]{ab}\times(\sqrt[6]{-1})^2=$

$$\sqrt[6]{ab}\times\sqrt[3]{-1}=\sqrt[6]{ab}\times-1=-\sqrt[6]{ab}.$$

De este modo hallarémos los productos de los radicales imaginarios de otros qualesquiera grados, y verémos que resultan alternativamente reales é imaginarios.

Del cálculo de los exponentes fraccionarios.

175 Quando en lugar de los signos radicales se hace uso de los exponentes fraccionarios para representar las raices que les corresponden (§. 132), entonces se puede aplicar inmediatamente á estos las reglas generales de los exponentes, y se hallan por medio de ellas los mismos resultados que por los métodos de que nos valemos para calcular las cantidades radicales.

Con efecto, si transformamos, por exemplo, $\sqrt[5]{a^3b^2}$ y $\sqrt[5]{a^3c^2}$ en $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}$ y $a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}$, tendrémos $\sqrt[5]{a^3b^2}\times\sqrt[5]{a^3c^2}=a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}\times a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$. Observando despues que $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$, y que por consiguiente $a^{\frac{6}{5}}=a^{1+\frac{1}{5}}=a\times a^{\frac{1}{5}}$ (§. 25); y que $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$ equivale á $\sqrt[5]{ab^2c^2}$, resultará $\sqrt[5]{a^3b^2}\times\sqrt[5]{a^3c^2}=a\sqrt[5]{ab^2c^2}$; resultado no solamente exâcto, sino ademas reducido á su mas sencilla expresion.

Sea el exemplo general $\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}$; y transfor-

mando los radicales propuestos en $a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}$, $b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}$ hallarémos por medio de las reglas de los exponentes (§. 25) $a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}\times b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}=a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}$. Si quisiésemos efectuar ahora la adicion de las fracciones $\frac{q}{m}$, $\frac{r}{n}$, seria necesario reducirlas á un mismo denominador; y para dar uniformidad á los resultados es necesario hacer otro tanto con las fracciones $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$. Por este medio nos resulta $a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq+mr}{mn}}c^{\frac{ms}{mn}}$; y restituyendo los signos radicales, tendrémos: $\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}=\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}$.

176 La division se efectúa tambien sencillamente: es fácil ver, por exemplo, que

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}}=\frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{5}}}=\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}}\ (\S.\ 38),$$

lo qual se reduce á $\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}}$; y reponiendo los signos radicales, resulta: $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}}=\sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}$; y en general

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

y reduciendo á un comun denominador los exponentes fraccionarios para efectuar la sustraccion indicada, se hallará:

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Ya se dexa conocer que la reduccion de los exponentes fraccionarios á un mismo denominador produce aquí el mismo efecto que la reduccion de los radicales á un mismo grado, y conduce precisamente á los mismos resultados (§. 171).

177 Tambien es evidente (§. 127) que

$(\sqrt[m]{a^p})^n = (a^{\frac{p}{m}})^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}}$; y (129) que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}.$$

El cálculo de los exponentes fraccionarios nos ofrece uno de los exemplos mas notables de la utilidad de los signos quando se los elige con inteligencia y acierto. La analogía que hay entre los exponentes fraccionarios y los enteros hace que las reglas que se deben seguir para el cálculo de estos sean aplicables al de aquellos; en vez de que son necesarios, como hemos visto, razonamientos particulares para descubrir las reglas del cálculo de las cantidades radicales, porque el signo $\sqrt{}$ que las acompaña no tiene conexîon alguna con la operacion que con él se indica. Quanto mas nos internemos en el Algebra, tanto mas echarémos de ver las numerosas ventajas que ha producido en esta ciencia la notacion de los exponentes, inventada por *Descartes*.

Teoría general de las equaciones.

178 Aunque las equaciones de primero y segundo grado son, propiamente hablando, las únicas que hasta ahora se saben resolver completamente; se han descubierto ciertas propiedades generales de las equaciones de todos los grados, cuyo conocimiento es muy conducente para resolverlas quando sean numéricas, y para otras varias investigaciones que ocurren en las partes mas sublimes del Algebra. El descubrimiento de estas propiedades se ha debido á una cierta forma particular que puede darse á qualquiera equacion.

Por de contado toda equacion completa de qualquier grado debe contener todas las potencias de la incógnita desde la de este grado hasta la primera inclusive, multiplicadas cada una de ellas por cantidades conocidas, y ademas un término enteramente conocido.

La equacion completa del quinto grado, por exemplo, contendrá todas las potencias de la incógnita desde la primera hasta la quinta inclusive; y si hubiese en ella muchos términos en que se halle la incógnita elevada á una misma potencia, será necesario imaginarlos reunidos en uno solo, como lo hemos hecho en las equaciones de segundo grado (§. 108). Se pasarán despues al primer miembro todos los términos de la equacion, ordenándolos con respecto á las potencias de la incógnita; y así el otro miembro será precisamente igual á cero: se hará positivo el primer término cambiando, si fuese necesario, los signos de todos los términos de la equacion. Por este medio la que se llama equacion general del quinto grado vendrá á tener esta forma:

$$nx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx^2 + t = 0;$$

en la qual se debe observar que las letras n, p, q, r, s, t pueden representar números sustractivos ó negativos, igualmente que aditivos ó positivos. Dividiendo despues por n todos los términos para no dexar en el primero mas coeficiente que la unidad; y haciendo $\frac{p}{n} = P$; $\frac{q}{n} = Q$; $\frac{r}{n} = R$; $\frac{s}{n} = S$; $\frac{t}{n} = T$; nos resultará:

$$x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

En lo sucesivo darémos por supuesto que qualquiera equacion está ya preparada del modo que acabamos de indicar; y así no habrá equacion de grado alguno que no pueda estar representada por la siguiente, que se llama *la equacion general de todos los grados:*

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0.$$

El vacío indicado por los puntos suspensivos se llena quando al exponente n se le da un valor particular.

Qualquiera cantidad ó qualquier símbolo algebráico, ora sea de los que se denominan cantidades reales, ora de las imaginarias, que puesto en lugar de la incógnita x en una equacion ya preparada, reduce á cero el primer miembro, y por consiguiente satisface á la equacion, se llama *raiz* de esta. Pero no tratándose aquí de potencias, ya se dexa entender que la voz *raiz* se toma en este tratado en sentido muy distinto del que hasta ahora la hemos dado (§§. 90 y 129).

179 La proposicion que hemos demostrado (§§. 126 y 159) con respecto á ciertas equaciones, se verifica en todas las de qualquier grado; por manera que puede considerarse como principio fundamental de toda esta teoría el siguiente: *Si suponemos representada por* a *qualquiera raiz de qualquiera equacion* $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx + U = 0$, *el primer miembro de esta será exâctamente divisible por el binomio* $x - a$.

En efecto, suponer que a es valor de x, ó raiz de la equacion propuesta, equivale á decir que $a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2} \ldots + Ta + U = 0$, y por consiguiente $U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta$; de manera que la equacion propuesta es enteramente la misma que esta:

$$\left.\begin{array}{r} x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx \\ -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta \end{array}\right\} = 0;$$

la qual puede escribirse de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} x^n - a^n + P(x^{n-1} - a^{n-1}) + Q(x^{n-2} - a^{n-2}) \\ \quad + R(x^{n-3} - a^{n-3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + T(x - a) \end{array}\right\} = 0;$$

y como las cantidades $x^n - a^n$; $x^{n-1} - a^{n-1}$; $x^{n-2} - a^{n-2}$ .... $x - a$, son todas exâctamente divisibles por el binomio $x - a$ (§. 158), es claro que el primer miembro de esta última equacion será exâctamente divisible por el mismo binomio, y de consiguiente lo será

tambien el primer miembro de la equacion propuesta, que es equivalente á la última.

Dalembert demuestra la misma proposicion del modo siguiente: si imaginamos efectuada la division del primer miembro de la equacion propuesta por el binomio $x-a$, y que se haya continuado la operacion hasta apurar, como es posible, todos los términos que contengan la x, el residuo final de esta division, en caso que lo haya, no podrá tener x. Si pues representamos por R este residuo y por Q el quociente que suponemos hallado, tendrémos precisamente (*Aritm.* §. 51): $x^n + Px^{n-1} \ldots + \&c. = Q\ (x-a) + R$. Ahora, si en lugar de x sustituimos a, el primer miembro debe reducirse á cero, puesto que a es valor de x; tambien se reduce á cero el término $Q\ (x-a)$, porque se reduce á cero el factor $x-a$; debe pues ser $R=0$ sin tener influxo en esto la sustitucion; porque no exîstiendo en el residuo la x, no se puede efectuar en él la sustitucion, ni menos podrá esta alterar el valor que antes tenia. Si pues, haciendo la sustitucion debe ser $R=0$, deberá serlo aun antes de hacerla, y de consiguiente el primer miembro de la equacion propuesta es exâctamente divisible por el binomio $x-a$.

180 Para hallar el quociente de esta division, basta sustituir en lugar de las cantidades $x^n - a^n$; $x^{n-1} - a^{n-1}$; $x^{n-2} - a^{n-2} \ldots x-a$ los quocientes que dan quando se las divide por $x-a$; los quales son, como ya sabemos (§. 158), los siguientes:

$$\begin{array}{r} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots + a^{n-1} \\ x^{n-2} + ax^{n-3} \ldots + a^{n-2} \\ x^{n-3} \ldots + a^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1. \end{array}$$

Ordenando los términos del resultado con respecto á las potencias de x, y reponiendo los coeficientes, vendrá el quociente total á ser:

$$\begin{array}{r} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots + a^{n-1} \\ + Px^{n-2} + Pax^{n-3} \ldots + Pa^{n-2} \\ + Qx^{n-3} \ldots + Qa^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +T. \end{array}$$

181 No es necesario mas que atender á las reglas de la division para venir en conocimiento de que en habiendo dividido por $x-a$ el primer miembro de la equacion $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \&c. = 0$, debe resultar un quociente de esta forma: $x^{n-1} + P'x^{n-2} + Q'x^{n-3} + \&c.$, designando por P', Q' &c. los coeficientes conocidos diferentes de los primitivos P, Q &c.; y así tendrémos:

$$x^n + Px^{n-1} + \&c. = (x-a)(x^{n-1} + P'x^{n-2} + \&c.);$$

y conforme á la observacion que hicimos (§. 116), podrá verificarse de dos modos la equacion propuesta, á saber: ó haciendo $x-a=0$; ó $x^{n-1} + P'x^{n-2} + \&c. = 0$. Si ahora tuviere la equacion $x^{n-1} + P'x^{n-2} + \&c. = 0$ una raiz b, será su primer miembro exâctamente divisible por el binomio $x-b$; y efectuada que sea la division, tendrémos:

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \&c. = (x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \&c.);$$

y de consiguiente

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \&c. = (x-a)(x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \&c.)$$

Podrá pues verificarse la equacion primitiva propuesta de tres distintas maneras, á saber: ó haciendo $x-a=0$, ó $x-b=0$, ó $x^{n-2} + P''x^{n-3} + \&c. = 0$. Si la última de estas equaciones tuviere una raiz c, su primer miembro se descompondrá tambien en los dos factores $x-c$, $x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \&c.$, y tendrémos $x^n + Px^{n-1} + \&c. = (x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \&c.)$; donde se ve que la equacion propuesta se podrá verificar de quatro distintas maneras, haciendo sucesivamente $x-a=0$; $x-b=0$; $x-c=0$; $x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \&c. = 0$. Y continuando el mismo razonamiento, irémos hallando los factores de los grados indicados por los exponentes $n-4$, $n-5$, $n-6$ &c.; y si igualando á cero cada factor de estos se descubre alguna raiz de la equacion que entonces resulta, vendrémos á dar al primer miembro de la equacion primitiva la forma de un producto de varios factores binomios del primer grado: $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots\ldots\ldots (x-l)$; es decir, el polinomio que formaba el primer miembro de la equacion, se habrá descompuesto en tantos factores binomios del primer grado como unidades haya en el exponente n que indicaba el grado de la equacion. Por manera que la equacion general $x^n + Px^{n-1} + \&c. = 0$ podrá verificarse de n maneras, esto es; ó ha-

ciendo $x-a=0$, ó $x-b=0$, ó $x-c=0$, ó $x-d=0$, ó por último $x-l=0$; pero es necesario tener entendido que no se deben considerar como verdaderas á un mismo tiempo todas estas equaciones, sino sucesivamente; pues de lo contrario incurriríamos en manifiestas contradicciones. En efecto, si al mismo tiempo que supusiéramos $x-a=0$, y de consiguiente $x=a$; supusiéramos tambien $x-b=0$, y de consiguiente $x=b$, se inferiria que las dos cantidades desiguales representadas por a y b serian iguales entre sí.

182 En habiendo descompuesto el polinomio que se halla en el primer miembro de la equacion general propuesta $x^n+Px^{n-1}+$ &c. $=0$, en los n factores del primer grado $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d \ldots . x-l$, es absolutamente imposible hallar ningun otro factor de primer grado del mismo polinomio. En efecto, si este polinomio fuese ademas exâctamente divisible por $x-\alpha$, por exemplo, tendríamos precisamente: $x^n+Px^{n-1}+$ &c. $=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+$ &c.), y por consiguiente $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots . (x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+$ &c.); y como suponiendo $x=a$, se reduce á cero el primer miembro de esta equacion, debe sucederle lo mismo al segundo, el qual en esta hipótesis se convierte en $(a-\alpha)(a^{n-1}+pa^{n-2}+$ &c.). No pudiendo reducirse á cero el primer factor $a-\alpha$ por ser desiguales por suposicion a y α, es necesario que se reduzca á cero el otro factor $a^{n-1}+pa^{n-2}$ &c.; y así la cantidad a será forzosamente raiz de la equacion $x^{n-1}+px^{n-2}+$ &c. $=0$. De aquí se sigue que su primer miembro será exâctamente divisible por $x-a$, y que

$$x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.=(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.);$$

de donde resulta que

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots . (x-l)$$
$$=(x-\alpha)(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.).$$

Dividiendo los dos miembros de esta equacion por $x-a$ tendrémos estotra:

$$(x-b)(x-c)(x-d) \ldots (x-l)=(x-\alpha)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.)$$

en la qual se puede demostrar por medio del razonamiento que acabamos de hacer, que el segundo factor $x^{n-2}+p'x^{n-3}+$ &c. del segundo miembro debe ser exâctamente divisible por $x-b$; y efectuada esta division, y suprimido que sea de ambos miembros el

factor comun $x - b$, se reducirá la equacion á estotra:
$(x - c)(x - d) \ldots (x - l) = (x - \alpha)(x^{n-3} + p'' x^{n-4} + \&c.)$.
Continuando del mismo modo, se llegarán á suprimir sucesivamente de ambos miembros $n - 1$ factores: por manera que en el primero no habrá quedado mas factor que $x - l$, y en el segundo habrá solo $x - \alpha$; y de aquí será forzoso inferir que $x - l = x - \alpha$, ó que $l = \alpha$.

De lo expuesto se sigue que en ninguna equacion, sea del grado que fuere, el número de factores binomios del primer grado que tenga su primer miembro, jamas puede ser mayor *que el número de unidades del exponente del grado de la equacion, y de consiguiente no puede esta tener mayor número de raices* *.

183 Esto nos basta para que podamos considerar al primer miembro de qualquiera equacion como un producto de un número de factores $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ &c. igual al exponente de su grado; y para que á conseqüencia lo podamos suponer formado lo mismo que el que hemos hallado (§. 135); con la única modificacion de ser los términos alternativamente positivos y negativos.

Limitándonos, por exemplo, á quatro factores, tendrémos el siguiente producto:

$$\begin{array}{lllll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0; \\ - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

en el qual se deberán verificar las mismas propiedades que hemos ya observado (§. 135), y que generalmente hemos demostrado (§. 136); bien que por ser aquí las segundas partes de los binomios las raices de la equacion con signos contrarios, enunciarémos aquellas mismas propiedades del modo siguiente:

* Ahora falta demostrar que ni el número de factores binomios del primer miembro de qualquiera equacion, ni por consiguiente el número de raices de esta puede ser menor que el de las unidades del exponente de su grado. De esto se tratará en el *Complemento del Algebra*.

El coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario al que tenga en la equacion, será la suma de todas las raices de ella.

El coeficiente del tercer término será la suma de todos los productos binarios de las raices.

El coeficiente del quarto término, tomado con un signo contrario, será la suma de todos los productos ternarios de las raices; y así sucesivamente, cuidando de cambiar los signos de los coeficientes de los términos que se hallen en lugar designado por número par.

El último término, que está sujeto, como todos los demas, á la misma ley, será el producto de todas las raices.

Igualando, por exemplo, á cero el producto de los tres factores $x-5$, $x+4$, $x+3$, se formará la equacion $x^3+2x^2-23x-60=0$, cuyas raices serán $+5$, -4, -3. La suma de ellas será $5-4-3=-2$; la de sus productos binarios $5\times-4+5\times-3-4\times-3=-20-15+12=-23$; y últimamente el producto de las tres raices será $+5\times-4\times-3=60$.

De este modo pudiéron haberse deducido los coeficientes 2; -23; -60, con solo cambiar el signo de los del segundo y del quarto término.

Si igualamos á cero el producto de los tres factores $x-2$, $x-3$ y $x+5$, resultará la equacion $x^3-19x+30=0$, en la qual no se halla x^2, que es la potencia inmediatamente inferior á la del primer término; y por esta razon se dice que la equacion propuesta *carece de segundo término*. Esto proviene de que la suma de las raices, que tomada con signo contrario, debe generalmente ser el coeficiente de este término, es en este caso $2+3-5=0$; ó como suele decirse, de que la suma de las raices positivas es igual á la de las negativas *.

184 Hemos demostrado (§. 182) que considerando á una equacion como producto de muchos factores simples del primer grado, el número de estos factores no puede ser mayor que el indicado por el exponente n del grado de la equacion; pero si combinamos estos factores simples de dos en dos, formarémos productos binarios ó de segundo grado, que serán tambien factores de la

* Véase la nota primera al fin del tomo.

equacion propuesta, y cuyo número estará indicado (§. 140) por $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$.

Por exemplo, siendo el primer miembro de la equacion

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad\; - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad\; - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad\; - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\qquad + bdx^2 \\ \qquad\qquad + cdx^2, \end{array}$$

el producto de $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d)$, se puede descomponer en factores del segundo grado de los seis modos siguientes:

$$(x-a)(x-b)\times(x-c)(x-d);$$
$$(x-a)(x-c)\times(x-b)(x-d);$$
$$(x-a)(x-d)\times(x-b)(x-c);$$
$$(x-b)(x-c)\times(x-a)(x-d);$$
$$(x-b)(x-d)\times(x-a)(x-c);$$
$$(x-c)(x-d)\times(x-a)(x-b);$$

de donde resulta que una equacion de quarto grado puede tener seis divisores del segundo.

Combinando de tres en tres los factores simples se formarán los divisores ternarios ó del tercer grado de la propuesta. El número de estos en una equacion del grado n estará indicado por

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

y así sucesivamente.

De la eliminacion de las incógnitas que estan combinadas con otras en las equaciones de los grados superiores al primero.

185 Para eliminar una de dos incógnitas que se hallen combinadas en dos equaciones fundamentales de una misma qüestion, bastarán los métodos indicados (§§. 78 y 84) siempre que en alguna de las dos equaciones propuestas no pase del primer grado la incógnita que nos propongamos eliminar, sean quales fueren el grado

de esta misma incógnita en la otra equacion, y el de la otra incógnita en ambas equaciones.

Si fuesen, por exemplo, equaciones fundamentales de algun problema las dos siguientes:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2;$$
$$x^2 + xy = n^2;$$

observaríamos que en la segunda no pasa del primer grado la y, y por consiguiente será fácil deducir que $y = \frac{n^2 - x^2}{x}$; y sustituyendo esta expresion del valor de y y su quadrado en lugar de y y de y^2 en la primera equacion, resultará una nueva equacion, en la qual no habrá ya mas incógnita que la x. Esta equacion que no tiene mas de una incógnita, se llama la *equacion final* del problema.

186 Si en las dos equaciones propuestas se hallaren los quadrados de ambas incógnitas, será necesario para eliminar qualquiera de ellas por este método, deducir una expresion de su valor, resolviendo una de las equaciones, que en tal caso habrá de ser de segundo grado.

Si, por exemplo, se hubiesen deducido de la propuesta de algun problema estas dos equaciones:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2;$$
$$x^2 + y^2 = n^2;$$

de la segunda deduciríamos $y = \pm\sqrt{n - x^2}$; y sustituyendo en la primera esta expresion del valor de la y y su quadrado, resultaria:

$$ax^2 \pm bx\sqrt{n^2 - x^2} + c(n^2 - x^2) = m^2;$$

con lo qual podrá parecer á primera vista que hemos conseguido el objeto que nos proponíamos, pues que la última equacion no contiene ya mas incógnita que la x; pero como no se puede resolver la equacion final sin estar previamente reducida á una forma racional, será necesario hacer que desaparezca el radical, baxo el qual se halla la incógnita, para dar á la equacion aquella forma.

Es fácil ver que si el radical estuviese solo en un miembro, se le haria desaparecer elevando ambos miembros al quadrado. Reuni-

rémos pues, por medio de la transposicion, en el primer miembro todos los términos racionales, y harémos que quede solo en el segundo el radical. Así tendrémos:

$$ax^2+c(n^2-x^2)-m^2=\mp bx\sqrt{n^2-x^2};$$

y elevando ambos miembros al quadrado, resultará la equacion

$$\left.\begin{array}{l}a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4+2acx^2(n^2-x^2)\\ \quad -2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2)\end{array}\right\}=b^2x^2(n^2-x^2);$$

la qual no contiene ya radical alguno.

El método de que acabamos de valernos para que desapareciese el radical, es digno de ser notado, porque se ofrecen muy á menudo ocasiones de executar esta operacion. Está, como hemos visto, reducido á *dexar solo en un miembro el radical que queramos hacer desaparecer; y á elevar despues los dos miembros de la equacion propuesta á la potencia indicada por el exponente del radical.*

187 Lo embarazoso que es este método en el caso de haber en la equacion muchos radicales, junto con la dificultad de resolver como es necesario una de las primitivas equaciones propuestas, dificultad que en el estado actual del Algebra es muchas veces insuperable; han hecho buscar otro medio de eliminar las incógnitas, sin necesidad de hallar previamente expresion alguna del valor de la incógnita que intentemos eliminar. Por manera que de este modo la resolucion de las equaciones ha venido á ser el último paso que hay que dar para completar la solucion de qualquier problema.

Para facilitar los cálculos se ponen las equaciones de dos incógnitas baxo la forma de equaciones de una sola, dexando á la vista únicamente la que nos propongamos eliminar. Si tuviésemos, por exemplo, una equacion de dos incógnitas

$$x^2+axy+bx=cy^2+dy+e,$$

pasaríamos todos los términos á un solo miembro; y ordenándolos con respecto á la x, resultaria:

$$x^2+(b+ay)x-(cy^2+dy+e)=0;$$

y haciendo para abreviar $b+ay=P$; $-cy^2-dy-e=Q$, quedaria transformada la equacion propuesta en $x^2+Px+Q=0$.

La equacion general del grado m con dos incógnitas debe contener todas las potencias de x y de y que no pasen de este grado,

$$(x^2+11x+49)(x-2)=0$$
$$(x+14)(x-2)=0;$$

en las quales no es ya permitido dudar que si hacemos $x=2$, quedan ambas plenamente satisfechas.

190 El medio que acabamos de indicar para determinar el valor de una de las incógnitas luego que esté conocido el de la otra, puede tambien servirnos para eliminar qualquiera de ellas; y con este objeto harémos el siguiente razonamiento: una vez que en habiendo determinado, segun lo exîja la propuesta de una qüestion, el valor de una de las incógnitas que se hallen combinadas en las equaciones fundamentales; y en habiendo sustituido en estas aquel valor que suponemos determinado, adquieren los primeros miembros de las dos equaciones un divisor comun que antes no tenian, es consiguiente que si despues de hecha aquella sustitucion practicamos con los primeros miembros de las dos equaciones la serie de operaciones necesarias para hallar el máxîmo divisor de dos qualesquiera cantidades (§. 48), el residuo final deberá reducirse á cero. Por la inversa, si antes de hallar el valor de la incógnita y, y sin hacer sustitucion alguna en las equaciones fundamentales de la qüestion, las ordenamos con respecto á la x, y efectuamos con los primeros miembros de ellas la misma serie de operaciones que practicaríamos para hallar el máxîmo divisor comun de estos; en habiendo llegado á un residuo que no contenga la x, deberémos igualar á *cero* este residuo, porque esta es la condicion sin la qual no puede exîstir divisor alguno comun de los primeros miembros de las equaciones propuestas ordenadas con respecto á la x, y sin la qual no puede por consiguiente exîstir combinacion alguna de valores de las dos incognitas, que satisfaga á las equaciones fundamentales, ni menos á la qüestion que las haya originado. La equacion que formemos haciendo igual á cero aquel residuo, será pues la *equacion final* de la qüestion propuesta.

En la página adjunta se pueden ver efectuadas todas las operaciones que requiere este método, aplicado á las dos equaciones:

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0,$$

de las quales hemos tratado en el párrafo anterior. En la segunda

Primera division.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3yx^2+3y^2x-98 & x^2+4yx-2y^2-10 \\ -x^3-4yx^2+2y^2x+10x & \hline x-y \end{array}$$

$$-yx^2+5y^2x+10x-98$$
$$+yx^2+4y^2x-2y^3-10y$$

Primer residuo........ $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

Segunda division.

$$\begin{array}{l|l} x^2+4yx-2y^2-10 & (9y^2+10)x-2y^3-10y-98 \end{array}$$

ó $(9y^2+10)x^2+36y^3x-18y^4-110y^2-100$ .... $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

$$+40yx$$
$$-(9y^2+10)x^2+2y^3x+98x$$
$$+10yx$$

Cociente: $x+38y^3+50y+98$

$$+38y^3x-18y^4-110y^2-100$$
$$+50yx$$
$$+98x$$

ó $(9y^2+10)(38y^3+50y+98)x-(9y^2+10)(18y^4+110y^2+100)$
$$-(9y^2+10)(38y^3+50y+98)x+(2y^3+10y+98)(38y^3+50y+98)$$

Segundo residuo.............. $(2y^3+10y+98)(38y^3+50y+98)-(9y^2+10)(18y^4+110y^2+100)$

Efectuando las multiplicaciones, y reduciendo...... $-86y^6-690y^4+3920y^3-1500y^2+5880y+8604$

Dividiendo por 2 todos los términos; cambiando todos los signos, é igualando á *cero*, resultará la siguiente equacion final:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0.$$

division en la qual ha servido de divisor

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98,$$

ha resultado un residuo que no contiene la x; é igualado á *cero*, segun prescribe este método, hemos obtenido la equacion final:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0;$$

la qual resuelta, nos dará ademas del valor de $y=3$, indicado anteriormente, todos los demas valores de y que pueden satisfacer á las dos equaciones fundamentales propuestas.

191 Despues que hayamos resuelto la equacion final, y obtenido algun valor de y, es necesario para hallar el correspondiente de x, sustituir aquel en el último divisor, que debe ser el divisor comun de los primeros miembros de las dos equaciones propuestas. En sabiendo, por exemplo, que $y=3$, se pondrá este número en el segundo divisor $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$; se le igualará en seguida á cero; y resultará la equacion de primer grado $91x-182=0$; y de esta se deducirá que $x=2$.

Si aconteciere, como puede muy bien suceder, que la sustitucion del valor de y hiciese desaparecer enteramente el último divisor, será esto un indicio seguro de que aquella sustitucion deberá efectuarse en el divisor anterior, y de que este será en tal caso el divisor comun de los primeros miembros de las dos equaciones propuestas. En este mismo caso, despues de hecha la sustitucion é igualado á cero el penúltimo divisor, tendrémos que resolver una equacion de segundo grado con una sola incógnita x, cuyos dos valores corresponderán al único valor que suponemos conocido de la y. Si la sustitucion del valor de y hiciese tambien desaparecer el penúltimo divisor, tendrémos que hacerla en el antepenúltimo, que en tal caso será el divisor comun, y con el qual vendrá á formarse una equacion de tercer grado con una sola incógnita x; y entonces tendrá esta tres valores correspondientes al único que conocemos de la y; ó lo que es lo mismo, que combinados con este satisfacen á las dos equaciones propuestas. En general será necesario retroceder hasta encontrar un divisor que no se desvanezca quando en él hagamos la sustitucion del valor de y.

Puede tambien suceder que ó no resulte residuo alguno final, ó solo queden en él cantidades conocidas. En el primer caso deberé-

mos inferir que los primeros miembros de las dos equaciones tienen un divisor comun independiente del valor de y; y de consiguiente las equaciones propuestas deben tener esta forma: $P \times D = o$; $Q \times D = o$; representando por D el comun divisor de los primeros miembros de ambas. En equaciones de esta forma se ve inmediatamente que se satisface á un mismo tiempo á las dos, haciendo $D = o$; y esta equacion nos dará el valor de una de las incógnitas expresado por medio de la otra, quando ambas esten combinadas en el factor D; pero quando este factor no contenga mas de una sola incógnita, se podrá determinar el valor de esta; y el de la otra quedará enteramente indeterminado. Tambien se satisface á las dos equaciones propuestas suprimiendo el factor comun D, y haciendo $P = o$, y $Q = o$; por cuyo medio tendrémos dos equaciones que podrán darnos soluciones determinadas de la qüestion propuesta.

Sean, por exemplo, las dos equaciones

$$(ax + by - c)(mx + ny - d) = o;$$
$$(a'x + b'y - c')(mx + ny - d) = o;$$

de las quales, si suponemos igual á *cero* el segundo factor que es comun á los dos primeros miembros, deducirémos la siguiente equacion, en la qual se hallan combinadas ambas incógnitas:

$$mx + ny - d = o$$

y de consiguiente quedará indeterminada la qüestion; pero si suprimiendo este factor comun, igualamos á cero los otros factores restantes, tendremos las dos equaciones:

$$ax + by - c = o; \quad a'x + b'y - c' = o,$$

ó las equivalentes $ax + by = c$; $a'x + b'y = c'$; y baxo este supuesto será determinada la qüestion, puesto que tenemos tantas equaciones distintas é independientes como incógnitas.

En el caso en que sin desaparecer enteramente el residuo final de la última division contenga solo cantidades conocidas, inferirémos que las dos equaciones propuestas son contradictorias; porque aquel resultado nos da á conocer que los primeros miembros no pueden tener divisor alguno comun; y que de consiguiente á las equaciones les falta la indispensable condicion sin la qual no se pueden verificar ambas á un mismo tiempo. En efecto, para que tuviesen esta condicion, seria necesario que fuese nula una cantidad cuya magni-

tud está determinada en la propuesta de la qüestion; y esto es un absurdo manifiesto. Tiene pues este caso mucha analogía con el del §. 68.

192 Todo lo que acabamos de decir se aplica fácilmente á dos equaciones qualesquiera:

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + Tx + U = 0$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots\ldots + Y'x + Z' = 0,$$

en las quales suponemos que la segunda incógnita y esté envuelta en los coeficientes P, Q, P', Q' &c. Con los primeros miembros de estas dos equaciones efectuarémos la misma serie de operaciones que si buscásemos su máxîmo comun divisor; y en llegando á un residuo en el qual no se halle la x, lo igualarémos á *cero*; y así tendrémos la equacion final, que solo tendrá la incógnita y; y en habiendo determinado algun valor de esta última incógnita, lo sustituirémos en el último ó en el penúltimo &c. divisor, el qual igualado á *cero*, nos dará el valor correspondiente de la otra incógnita x.

Aun nos resta que hacer sobre este método de eliminar las incógnitas una advertencia muy importante. Ya se sabe que en la investigacion del máxîmo divisor comun es necesario executar ciertas multiplicaciones á fin de conseguir que el primer término del polinomio dividendo sea exâctamente divisible por el primer término del divisor. Ahora bien, si no se tiene cuidado de que con estas multiplicaciones no se introduzcan factores comunes, saldrá mas complicado de lo que debiera el resultado final; bien que en procurando que sean los mas sencillos que puedan ser los multiplicadores que se empleen, no debe haber el menor rezelo de que la equacion final haya padecido alteracion alguna. Si acerca de esto quedare alguna duda, se pueden omitir, con solo el objeto de salir de ella, aquellas multiplicaciones *auxîliares* ó *subsidiarias*; de este modo los coeficientes de los términos del quociente y del residuo serán fracciones; y reduciendo estas á un comun denominador, resultará por numerador el mismo residuo, y por consiguiente la misma equacion final que por el método general anteriormente prescrito hubiéramos hallado.

De lo expuesto se infiere que el *deducir de dos equaciones con dos incógnitas la equacion final* es un problema determinado, y que no admite mas de una solucion; pero no por eso se debe inferir que

una equacion final no puede pertenecer á mas de una sola combinacion de equaciones con dos incógnitas; antes por el contrario debemos estar en la inteligencia de que una misma equacion final puede pertenecer á una infinidad de diferentes combinaciones de equaciones fundamentales. No se necesita mas que seguir un órden retrógrado al que seguimos en la indagacion del máxîmo divisor comun, para formar á nuestro arbitrio aquellas diferentes combinaciones de equaciones. Pero como esta qüestion sea de poquísimo uso en las Matemáticas elementales, no merece que nos detengamos á hacer todas las advertencias minuciosas á que podria dar motivo. Esta es una de aquellas cosas que se deben dexar á la sagacidad de los lectores inteligentes, los quales sabrán seguramente hallarlas por sí mismos en caso que les ocurra alguna ocasion que les haga conocer la necesidad de ellas.

193 *Euler* en vez de buscar por el método ordinario el máxîmo divisor comun de los primeros miembros de las dos equaciones propuestas, se vale de un arbitrio mucho mas cómodo, que darémos á conocer proponiéndonos las equaciones siguientes:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0.$$

Si representamos por $x - \alpha$ el factor comun que adquieren los primeros miembros de estas equaciones luego que está determinado el valor de la y, podrémos considerar al primer miembro de la primera equacion cómo un producto cuyos factores son $x - \alpha$, y otro factor de segundo grado $x^2 + px + q$; y al primer miembro de la segunda como otro producto de $x - \alpha$ por el factor de tercer grado $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$; siendo p y q, p', q' y r' coeficientes indeterminados. Tendrémos pues:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x - \alpha)(x^2 + px + q)$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x - \alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r').$$

Eliminando de estas equaciones el binomio $x - \alpha$ como si fuera una incógnita del primer grado (§. 84); hallarémos

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^3 + p'x^2 + q'x + r') =$$
$$(x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')(x^2 + px + q).$$

Siendo *idéntica* esta última equacion, y debiéndose por consiguiente verificar sin necesidad de asignar á x ningun valor particular; es ab-

solutamente indispensable que en el primer miembro haya tantos términos y con las mismas potencias de x como en el segundo; y que ademas sean iguales los respectivos coeficientes que una misma potencia de x tenga en los dos miembros. Efectuarémos pues las dos multiplicaciones indicadas; ordenarémos los términos de los productos con respecto á las potencias de x; é igualando los coeficientes que una misma potencia tenga en los dos miembros, resultarán las siguientes equaciones:

$$P+p'=P'+p; \quad Rp'+Qq'+Pr'=S'+R'p+Q'q,$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q; \quad Rq'+Qr'=S'p+R'q,$$
$$R+Qp'+Pq'+r'=R'+Q'p+P'q; \quad Rr'=S'q.$$

No habiendo en estas seis equaciones mas de cinco cantidades indeterminadas, que son p, q, p', q', r'; y no pasando del primer grado ninguna de ellas, se podrán eliminar todas, y por último resultado tendrémos una equacion que no contendrá mas cantidades que P, Q, R, P', Q', R', y S'; de consiguiente será esta la equacion final, puesto que en ella no habrá mas incógnita que la y.

El método que acabamos de exponer se reduce en suma á multiplicar cada uno de los primeros miembros de las equaciones por un factor, cuyos coeficientes sean indeterminados, para obtener dos productos de un mismo grado; á igualar en seguida uno con otro estos productos; á reunir en un solo miembro todos los términos de ambos, ordenados con respecto á las potencias de la incógnita; y por último á igualar á cero ó hacer que se desvanezca el coeficiente de cada una de estas potencias. De este modo lo ha presentado *Euler* en su *introduccion al analisis de los infinitos*. Designando por k el exponente del grado de los productos, el multiplicador del primer miembro de la equacion del grado m deberá ser del grado $k-m$, y el de la equacion del grado n habrá de ser del grado $k-n$. Como el primer término de cada uno de los multiplicadores tiene por coeficiente á la unidad, el primer multiplicador tendrá $k-m$ coeficientes indeterminados, y el segundo $k-n$; y de consiguiente el número total de coeficientes indeterminados será $2k-m-n$. En la reunion de los dos productos debe haber un número k de términos en donde se halle alguna potencia de la x; pero no es necesario hacer que se desvanezcan mas de $k-1$ coeficientes, porque el de la

potencia mas elevada de x se desvanece por sí mismo. De esto se sigue que el número total $2k-m-n$ de coeficientes indeterminados deberá ser igual á $k-1$; y de consiguiente el exponente k del grado de los productos deberá ser igual á $m+n-1$. Deberémos pues multiplicar por un factor del grado $n-1$ al primer miembro de la equacion del grado m, y por otro factor del grado $m-1$ al primer miembro de la equacion del grado n; y por último igualar entre sí los coeficientes que cada potencia de x tenga en los dos productos: lo qual es justamente lo que hemos practicado en el exemplo propuesto.

Es digno de observarse que este primer método de Euler contiene el gérmen del que *Bezout* nos ha dado con tan prolixa extension en su *teoría de las equaciones*.

194 Propongámonos eliminar la incógnita x de las equaciones

$$x^2+Px+Q=0;\quad x^2+P'x+Q'=0;$$

en las quales es fácil ver que deben ser del primer grado los multiplicadores del factor comun $x-\alpha$; á saber, $x+p$; $x+p'$; tendrémos pues: $R=0$; $R'=0$; $S'=0$; $q=0$; $q'=0$; $r'=0$; y resultará:

$$\left.\begin{array}{r} P+p'=P'+p \\ Q+Pp'=Q'+P'p \\ Qp'=Q'p \end{array}\right\} \text{ó} \left\{\begin{array}{l} p-p'=P-P' \\ P'p-Pp'=Q-Q' \\ Q'p-Qp'=0. \end{array}\right.$$

De las dos primeras equaciones se deducirá:

$$p=\frac{(P-P')P-(Q-Q')}{P-P'}$$

$$p'=\frac{(P-P')P'-(Q-Q')}{P-P'};$$

y sustituyendo en la tercera, resultará:

$$(P-P')Q'P-(Q-Q')Q'=(P-P')P'Q-(Q-Q')Q,$$

$$\text{ó}\quad (P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=0.$$

Ahora es necesario dividir la cantidad x^2+Px+Q por el factor supuesto $x+p$ para tener en el quociente el factor $x-\alpha$ que debe ser comun á los primeros miembros de las dos equaciones propuestas, y que igualado á *cero* nos dará el valor de x representado por α. Quando efectuemos esta division despreciarémos el residuo,

que es cabalmente la equacion final; y siendo el quociente $x+P-p$ lo igualarémos á *cero*, y deducirémos: $x=p-P$; y poniendo en lugar de p la expresion que antes hemos hallado de su valor, resultará: $x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}$.

195 Con el objeto de que se exerciten los principiantes, indicarémos la serie de operaciones que se deben efectuar para eliminar la x de las dos equaciones $x^3+Px^2+Qx+R=0$, y $x^3+P'x^2+Q'x+R'=0$, en cuyo caso tendrémos $S'=0$, $r'=0$ (§. 193), y resultarán estas cinco equaciones:

$$P+p'=P'+p;$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q;$$
$$R+Qp'+Pq'=R'+Q'p+P'q;$$
$$Rp'+Qq'=R'p+Q'q;$$
$$Rq'=R'q;$$

á las quales se les puede dar la forma siguiente:

$$p-p'=P-P'$$
$$P'p-Pp'+q-q'=Q-Q'$$
$$Q'p-Qp'+P'q-Pq'=R-R'$$
$$R'p-Rp'+Q'q-Qq'=0$$
$$R'q-Rq'=0.$$

Por medio de las reglas del §. 88 podríamos ciertamente deducir de quatro qualesquiera de estas cinco equaciones los valores de las quatro incógnitas p, p', q, q'; pero siendo tan sencillas, como son, la primera y la última equacion, nos será fácil obtener con mayor prontitud el resultado final. Hagamos, para abreviar,

$$P-P'=e;\ Q-Q'=e';\ R-R'=e'';$$

y de la primera y de la última equacion deducirémos:

$$p'=p-e;\quad q'=\frac{R'q}{R}.$$

Sustituyamos estas expresiones en las otras tres equaciones; y haciendo desaparecer el denominador R, se transformarán en estotras:

$$(P-P')Rp-(R-R')q=R(Pe-e')\ldots\ldots\ldots(a)$$
$$(Q-Q')Rp-(P'R-PR')q=R(Qe-e'')\ldots\ldots(b)$$
$$(R-R')Rp-(Q'R-QR')q=R^2e\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

Si ahora deducimos (§. 88) de las equaciones (a) y (b) los valores de p y de q, suprimiendo el factor R comun á los numeradores y al denominador, tendrémos:

$$p=\frac{(Pe-e')(P'R-PR')-(R-R')(Qe-e'')}{(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')}$$
$$q=\frac{R(Q-Q')(Pe-e')-R(P-P')(Qe-e'')}{(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la equacion (c), resultará una equacion final divisible por R; y efectuando esta division, quedará reducida á la siguiente:

$$(R-R')[(Pe-e')(P'R-PR')-(R-R')(Qe-e'')]$$
$$-(Q'R-QR')[(Pe-e')(Q-Q')-(P-P')(Qe-e'')]=$$
$$Re[(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')];$$

en la qual solo falta reponer en lugar de las letras e, e', e'' las expresiones á que equivalen.

196 Si se nos propusieren tres equaciones fundamentales de un mismo problema, designadas por (1), (2), (3), y en las quales se hallen combinadas tres incógnitas x, y, z, podrémos por medio de la regla precedente eliminar qualquiera de las incógnitas de dos qualesquiera de las equaciones, á la x, por exemplo, de (1) y (2). Despues podemos eliminar la misma incógnita de otra combinacion de equaciones, como de (1) y (3), ó (2) y (3). El resultado de estas dos eliminaciones será una combinacion de equaciones en las quales se hallarán solo las incógnitas y, z. Eliminando ahora de estas dos equaciones la incógnita y, por exemplo, obtendrémos la equacion final que solo contendrá la z. Pero es necesario observar que efectuando esta sucesiva eliminacion, no concurren del mismo modo las tres equaciones propuestas á formar la equacion final, porque una de ellas se emplea dos veces, y las otras dos no mas de una. De aquí proviene que la equacion final sale mas complicada de lo que debiera, por haberse introducido un factor extraño que nada tiene que ver

con la qüestion (§. 84). Bezout en su *teoría de las equaciones* se ha valido de un arbitrio que no está expuesto á este inconveniente; y ha hecho ver *que el exponente del grado de la equacion final que por la eliminacion debe resultar de qualquier número de equaciones completas de qualquier grado, y que contengan igual número de incógnitas, es igual al producto de los exponentes de los grados de estas equaciones. Poisson*, profesor en la escuela politécnica, ha dado de la misma proposicion una demostracion mas breve y mas directa que la de *Bezout*; pero como las nociones preliminares que exîge no nos permiten ponerla aquí, la expondrémos en el *complemento.*

De la indagacion de las raices comensurables y de las raices iguales de las equaciones numéricas.

197 Despues de haber dado á conocer las principales propiedades de las equaciones algebráicas y el modo de eliminar las incógnitas quando se hallen combinadas muchas en cada equacion, vamos á tratar de la resolucion numérica de las equaciones finales ó con una sola incógnita; es decir, del modo de averiguar sus raices quando sus coeficientes estan expresados por números. *

Ante todas cosas conviene tener entendido que *en no teniendo el primer término de la equacion mas coeficiente que la unidad, y siendo números enteros todos los demas coeficientes, es decir, todas las cantidades conocidas que entran en la equacion, ninguna de sus raices reales podrá expresarse por una fraccion; sino que forzosamente habrán de ser números enteros ó cantidades incomensurables.*

Para demostrar esta proposicion supongamos que la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ se haya sustituido en la equacion general

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0;$$

* No tenemos hasta ahora resolucion alguna general de las equaciones de los grados superiores al quarto; y si va á decir verdad, la única que podemos mirar como completa es la de las equaciones del segundo; porque las fórmulas que conocemos para hallar las raices de las equaciones de tercero y quarto grado son muy complicadas, padecen excepciones, y no son tan cómodas para la práctica como los metodos que vamos á explicar. De qualquier modo, se las puede ver en el *complemento.*

y que por la sustitucion se reduzca á cero el primer miembro, como se requiere para que $\frac{a}{b}$ sea valor de la x, ó raiz de la equacion. Tendrémos pues:

$$\frac{a^n}{b^n} + P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} \ldots\ldots + T\frac{a}{b} + U = 0;$$

y multiplicando por b^n todos los términos, se transformará la última equacion en estotra:

$$a^n + Pa^{n-1}b + Qa^{n-2}b^2 \ldots\ldots + Tab^{n-1} + Ub^n = 0;$$

la qual viene á ser:

$$a^n + b(Pa^{n-1} + Qa^{n-2}b \ldots\ldots + Tab^{n-2} + Ub^{n-1}) = 0.$$

El primer miembro de esta última equacion se compone de dos partes expresadas por números enteros: la segunda de ellas es exâctamente divisible por b; y la primera no lo es (§. 98), pues que se supone reducida la fraccion $\frac{a}{b}$ á su mas simple expresion, ó que a y b no tienen ningun divisor comun. Es por consiguiente imposible que estas dos partes sean iguales, como es indispensable, para que la una pudiese destruir á la otra.

198 A conseqüencia de esta observacion se ha echado de ver la utilidad de hacer que desaparezcan las fracciones de una equacion, ó de transformarla en otra cuyos coeficientes sean todos números enteros, sin dexar de ser la unidad el coeficiente del primer término. Esta transformacion se executa haciendo la incógnita propuesta igual á otra nueva incógnita dividida por el producto de todos los denominadores de los quebrados; y despues se multiplican todos los términos por el mayor denominador que haya en la nueva equacion.

Propongámonos, por exemplo, transformar la equacion

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0$$

en otra que no tenga quebrados; y para ello harémos á $x = \frac{y}{mnp}$, y poniendo esta expresion de x en la equacion propuesta, resultará:

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{by}{mn^2p} + \frac{c}{p} = 0;$$

y multiplicando por $m^3n^3p^3$ todos los términos de esta última equa-

cion, resultará transformada la primitiva en otra que no debe ya tener quebrado alguno, por razon de que en el multiplicador $m^3n^3p^3$ estan contenidos todos los factores de todos los denominadores:

$$y^3 + anpy^2 + bm^2np^2y + cm^3n^3p^2 = 0.$$

Quando los primitivos denominadores m, n, p tengan factores comunes, bastará dividir la nueva incógnita y por el mínimo multiplo comun de todos aquellos denominadores. Estas simplificaciones se ocurren inmediatamente á qualquiera que comprehenda el objeto de esta transformacion, y de consiguiente no hay necesidad de que nos detengamos á explicarlas: nos limitarémos solamente á hacer observar que si todos los denominadores fuesen iguales á m, bastaria hacer $x = \frac{y}{m}$.

La equacion propuesta, que seria entonces

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{m} + \frac{c}{m} = 0,$$

se transformaria en

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{m^3} + \frac{by}{m^2} + \frac{c}{m} = 0;$$

y multiplicando por m^3 todos los términos, tendríamos:

$$y^3 + ay^2 + bmy + cm^2 = 0.$$

En habiendo hallado los valores que de esta equacion resulten para la y, se les dividirá por m, y se tendrán los que de la equacion primitiva deben resultar para la x; puesto que $x = \frac{y}{m}$. Y como por conseqüencia sea $y = mx$, los valores de y serán los de x multiplicados por m, y por esta razon se dice que esta transformacion equivale á multiplicar por m las raices de la equacion propuesta.

199 Ahora, supuesto que en siendo a la raiz de la equacion $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Sx^2 + Tx + U = 0$, tenemos $U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta$ (§. 179), es consiguiente que a haya de ser uno de los divisores del número entero U; y así quando este número tenga pocos divisores será fácil sustituirlos sucesivamente en lugar de x en la equacion propuesta, y por este medio se reconocerá si tiene ó no alguna raiz comensurable.

Si se nos propone, por exemplo, la equacion $x^3 - 6x^2 + 27x$

$-38=0$; atendiendo á que el número 38 no tiene mas divisores que los números 1, 2, 19, 38, irémos sucesivamente sustituyendo estos números, así positiva como negativamente, y verémos que solo el número entero $+2$ satisface á la equacion propuesta, y de consiguiente $x=2$. Dividirémos despues por $x-2$ el primer miembro de la equacion propuesta, é igualando á cero el quociente se formará la equacion $x^2-4x+19=0$, cuyas raices son imaginarias; y resolviéndola hallarémos que en la equacion

$$x^3-6x^2+27x-38=0$$

admite la x los tres valores siguientes:

$$x=2,\ x=2+\sqrt{-15};\ x=2-\sqrt{-15}.$$

200 El método que acabamos de indicar para descubrir el número entero que satisface á una equacion, viene á ser casi impracticable quando el último término de esta equacion tiene muchos divisores; pero de la equacion

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots\ldots-Ta$$

se deducen nuevas condiciones que abrevian mucho el cálculo. A fin de hacer mas perceptible el método, lo aplicarémos á la equacion general de quarto grado:

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0.$$

Representando como antes por a la raiz, tendrémos:

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0;$$

$$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4;$$

de donde se infiere que

$$\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3.$$

Esta última equacion nos hace ver que $\frac{S}{a}$ debe ser un número entero.

Trasladando despues R al primer miembro, resultará:

$$\frac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3;$$

haciendo para abreviar $\frac{S}{a}+R=R'$, y dividiendo por a los dos miembros de la equacion

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3,$$

tendrémos:

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

donde concluirémos que $\frac{R'}{a}$ debe ser un número entero.

Pasando Q al primer miembro; haciendo $\frac{R'}{a} + Q = Q'$; y dividiendo despues los dos miembros por a, obtendrémos: $\frac{Q'}{a} = -P - a$; de donde concluirémos que $\frac{Q'}{a}$ debe ser un número entero.

Pasando por último P al primer miembro; haciendo $\frac{Q'}{a} + P = P'$; y dividiendo por a, tendrémos: $\frac{P'}{a} = -1$. Reuniendo las condiciones que acabamos de enunciar, verémos que el número a no podrá ser raiz de la equacion propuesta como no satisfaga á las equaciones siguientes:

$$\frac{S}{a} + R = R'; \ \frac{R'}{a} + Q = Q'; \ \frac{Q'}{a} + P = P'; \ \frac{P'}{a} + 1 = 0,$$

de modo que R', Q' y P' sean números enteros.

De aquí se sigue que para cerciorarnos de si uno de los divisores a del último término S es ó no raiz de la equacion propuesta de quarto grado, es necesario

1.° *Dividir el último término por el divisor* a, *y añadir al quociente el coeficiente del penúltimo término, es decir, el de la primera potencia* x *de la incógnita:*

2.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al quociente el coeficiente del término antepenúltimo, es decir, el del quadrado* x^2 *de la incógnita:*

3.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al quociente el coeficiente del cubo* x^3 *de la incógnita:*

4.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al quociente la unidad, ó el coeficiente de la quarta potencia* x^4 *de la incógnita; y si el resultado fuere igual á cero, será el divisor* a *raiz de la equacion; pero si alguno de los quocientes no fuere número entero, ó no*

fuere cero el resultado de la última adicion, podrémos estar ciertos de que a *no es raiz de la equacion propuesta.*

Las mismas reglas pueden aplicarse á las equaciones de otros qualesquiera grados; pero es necesario tener entendido que así en las divisiones como en las que hemos llamado adiciones, se debe at... á los signos. Por manera que las adiciones se convertirán en sustracciones siempre que el coeficiente y el quociente que deban sumarse tengan signos contrarios. Así sucederá en todas las equaciones quando lleguemos á sumar el último quociente con el coeficiente 1 del primer término; pues de lo contrario no podria el resultado reducirse á cero, como es indispensable para que el divisor a, que hayamos elegido, sea raiz de la equacion. *

201 Quando se aplican estas reglas á exemplos particulares, se puede disponer el cálculo de manera que se hagan á un mismo tiempo las sustituciones de todos los divisores del último término, y descubrir quál de ellos sea raiz de la equacion propuesta.

Sea, por exemplo, la equacion particular de quarto grado $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$; y dispondrémos el cálculo del modo siguiente:

+15,	+5,	+3,	+1,	−1,	−3,	−5,	−15,
+1,	+3,	+5,	+15,	−15,	−5,	−3,	−1,
−19,	−17,	−15,	−5,	−35,	−25,	−23,	−21,
			−5,	−5,	+35,		
			+18,	+18,	+58,		
			+6,	+18,	−58,		
			−3,	+9,	−67,		
			−1,	+9,	+67,		
			0.				

Todos los divisores del último término 15 estan colocados por órden

* No seria difícil demostrar por lo expuesto (§. 180) que las cantidades representadas por $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$ tomadas con signo contrario son los coeficientes del quociente del polinomio $x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$ dividido por el binomio $x - a$. Por manera que el quociente de esta division deberá ser:

$$x^3 - \frac{Q'}{a}x^2 - \frac{R'}{a}x - \frac{S}{a}.$$

de magnitud, tanto con el signo + como con el signo —, en la primera línea, que llamarémos la línea de los divisores a.

La segunda línea contiene los quocientes del número 15 dividido sucesivamente por todos sus divisores; y así la llamarémos la línea de las cantidades $\frac{S}{a}$.

La tercera línea se ha formado añadiendo á cada una de las cantidades de la línea precedente el coeficiente —20 de la primera potencia de la incógnita x; y de consiguiente es la línea de las cantidades representadas por $R' = \frac{S}{a} + R$.

La quarta línea contiene los quocientes de cada número de la precedente dividido por el divisor que le corresponde, y esta es la línea de las cantidades $\frac{R'}{a}$; bien que se han omitido todos los quocientes que no eran números enteros.

La quinta línea resulta de los números escritos en la anterior añadidos al número 23 que multiplica á x^2; y esta línea comprehende las cantidades representadas por Q'.

La sexta línea contiene los quocientes de cada número de la anterior dividido por el divisor que le corresponde; y contiene las cantidades representadas por $\frac{Q'}{a}$.

La séptima comprehende las sumas de los números de la precedente y del coeficiente —9 que multiplica á x^3; y así se hallan en ella las cantidades representadas por $\frac{Q'}{a} + P = P'$.

La octava en fin se obtiene dividiendo cada uno de los números de la anterior por el divisor correspondiente, y es la línea de $\frac{P'}{a}$; y no hallándose —1 mas que en la coluna que á su cabeza tiene +3 en la línea de los divisores, inferirémos que la equacion propuesta no tiene mas de una raiz comensurable, la qual es +3; * de

* Formando el quociente con arreglo á lo observado en la nota anterior, hallarémos que $\frac{x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15}{x-3} = x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

manera que el primer miembro de la equacion será exâctamente divisible por $x - 3$.

En la tabla que formemos para qualquiera otra equacion, podrémos omitir los divisores $+1$ y -1; porque la sustitucion de estos se efectúa directamente en la equacion propuesta con suma prontitud y facilidad.

202 Sírvanos de nuevo exemplo la equacion particular de tercer grado $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$. Despues de haber reconocido por la sustitucion directa que los números $+1$ y -1 no satisfacen á esta equacion, formarémos por las reglas precedentes la tabla que sigue, teniendo presente que por no hallarse en esta equacion la primera potencia de la incógnita x, debemos considerar al término en que correspondia estar esta potencia como si su coeficiente fuese *cero*. Es pues necesario omitir la tercera línea, y deducir inmediatamente de la segunda la quarta.

+36,	+18,	+12,	+9,	+6,	+4,	+3,	+2,	−2,	−3,	−4,	−6,	−9,	−12,	−18,	−36,
+1,	+2,	+3,	+4,	+6,	+9,	+12,	+18,	−18,	−12,	−9,	−6,	−4,	−3,	−2,	−1,
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
				+1,		+4,	+9,	+9,	+4,		+1;				
				−6,		−3,	+2,	+2,	−3,		−6;				
				−1,		−1,	+1,	−1,	+1;		+1.				
				0		0		0							

En este exemplo se ve que hay tres números que satisfacen á todas las condiciones, los quales son: $+6$, $+3$ y -2; y así se obtienen á un mismo tiempo las tres raices de que es susceptible la equacion propuesta, y se reconoce que el primer miembro de ella es el producto de los tres factores simples $x - 6$, $x - 3$ y $x + 2$.

203 Conviene observar que hay equaciones literales que se transforman muy fácilmente en equaciones numéricas. Si tuviésemos, por exemplo,

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0;$$

haciendo $y = px$, resultaría:

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0;$$

y como todos los términos de esta equacion pueden dividirse por p^3, la reduciríamos á

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0;$$

y en habiendo averiguado que el binomio $x+7$ es el único divisor comensurable del primer miembro de esta última equacion, ó lo que es lo mismo, que $x=-7$; será fácil inferir que en la equacion literal propuesta el único valor comensurable es $y=-7p$.

La equacion literal que hemos propuesto es de las que se llaman *equaciones homogéneas*, porque no haciendo cuenta de los coeficientes numéricos, contiene cada uno de sus términos igual número de factores. *

204 Suponiendo ya determinada una de las raices de una equacion, podemos mirar como incógnita la diferencia entre esta raiz y qualquiera de las otras; y por este medio obtendrémos una equacion de un grado inferior al de la propuesta, y en la qual pueden observarse muchas propiedades notables.

Sea la equacion general

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots+Tx+U=0;$$

representemos por a, b, c, d &c. sus raices; y sustituyendo en ella $a+y$ en lugar de x, y desenvolviendo las potencias, tendrémos:

$$\left.\begin{array}{l}
a^m \quad +ma^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2\ldots+y^m \\
+Pa^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}y+\frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2+\ldots \\
+Qa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}y+\frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2+\ldots \\
+Ra^{m-3}+(m-3)Ra^{m-4}y+\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+Ta\ \ldots\ +Ty \\
+U
\end{array}\right\}=0.$$

En cuyo resultado la primera coluna debe reducirse á *cero*, puesto que a es una de las raices de la equacion. Podemos pues suprimir

* Los lectores que quieran ver tratada con mas extension la averiguacion de los *divisores comensurables* de las equaciones numéricas y literales podrán acudir á la parte tercera de los Elementos de Algebra de *Clairaut*.

esta columna; dividir despues por y todos los términos restantes; y tendrémos entonces:

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y+\ldots\ldots+y^{m-1} \\ +(m-1)Pa^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y+\ldots\ldots \\ +(m-2)Qa^{m-3}+\frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y+\ldots\ldots \\ +(m-3)Ra^{m-4}+\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +T \end{array}\right\}=0.$$

Puesto que las m raices de la equacion primitiva eran a, b, c &c.; las $m-1$ raices de la última equacion, que se llama *la transformada*, serán $y=b-a$; $y=c-a$; $y=d-a$; .... &c.

Representemos la equacion *transformada* por la expresion siguiente:

$$A+\frac{B}{2}y+\frac{C}{2\cdot 3}y^2\ldots\ldots\ldots+y^{m-1}=0\ldots\ldots (d);$$

haciendo para abreviar

$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots\ldots\ldots+T=A;$
$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Pa^{m-3}\ldots\ldots\ldots=B;$
&c.

y designemos por V la expresion

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots\ldots\ldots+Ta+U.$$

205 Si la equacion propuesta tuviere dos raices iguales; si por exemplo fuere $a=b$, habrá forzosamente de ser *cero* uno de los valores de y; á saber, $b-a$; y de consiguiente deberá verificarse la equacion (d) haciendo en ella $y=0$. Esta suposicion hace por decontado que desaparezcan todos los términos que contienen la y, que son todos los de la equacion, excepto el enteramente conocido A; luego para que se verifique la equacion es necesario que este último sea nulo por sí mismo; luego si la equacion propuesta tuviere dos raices iguales á a, este valor deberá satisfacer á un mismo tiempo á las dos equaciones

$$V=0;\ A=0.$$

Quando la propuesta tenga tres raices iguales á a, de modo que sea $a = b = c$, se reducirán á *cero* dos de las raices de la equacion (d), que son $b - a$ y $c - a$; en cuyo caso será el primer miembro de la equacion (d) exâctamente divisible dos veces consecutivas por $y - 0$ (§. 179) ó por y. Y como no pueda esto verificarse sin que hayan desaparecido enteramente los coeficientes A y B, es necesario que el valor de a satisfaga á un mismo tiempo á las tres equaciones:

$$V = 0;\ A = 0;\ B = 0.$$

Continuando el mismo razonamiento se puede hacer ver que quando la propuesta tenga quatro raices iguales, la equacion (d) tendrá tres raices iguales á cero; su primer miembro será exâctamente divisible tres veces consecutivas por y; y como esto no pueda verificarse sin que sean nulos á un mismo tiempo los coeficientes A, B y C, es consiguiente que el valor de a satisfaga á un mismo tiempo á las quatro equaciones

$$V = 0;\ A = 0;\ B = 0;\ C = 0.$$

Por este medio no solo podrémos reconocer si una raiz a ya conocida se halla repetida muchas veces entre las de la equacion propuesta, sino tambien nos será fácil deducir un método general para averiguar, aun antes de conocer raiz alguna, si la equacion tiene ó no raices iguales ó repetidas.

Para esto es necesario observar que en el caso en que sea $A = 0$, ó

$$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots + T = 0;$$

podemos considerar á la cantidad a como raiz de la equacion

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} \ldots + T = 0,$$

indicando entonces x una incógnita qualquiera; y puesto que a es tambien raiz de la equacion $V = 0$, ó $x^m + Px^{m-1} + \&c. = 0$, es consiguiente (§. 189) que $x - a$ sea un factor comun de los primeros miembros de las dos equaciones anteriores.

Convirtiendo asimismo a en x en las cantidades B, C &c. vendrá á ser igualmente el binomio $x - a$ factor comun de los primeros miembros de las nuevas equaciones $B = 0$, $C = 0$ &c., siempre que la raiz a reduzca á cero las cantidades primitivas B, C &c.

Lo que acabamos de decir respecto de la raiz a convendrá igualmente á qualquiera otra raiz que se halle repetida muchas veces; y así buscando por el método del máxîmo comun divisor los facto-

res comunes de los primeros miembros de las equaciones

$$V=0;\ A=0;\ B=0;\ C=0;\ \&c.$$

estos factores comunes nos darán á conocer las raices iguales de la propuesta, en el órden siguiente:

Cada uno de los factores que sean comunes solo á los primeros miembros de las dos primeras equaciones, será dos veces factor del primer miembro de la propuesta; es decir, que si las cantidades representadas por V y por A tuvieren por comun divisor una expresion de la forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, por exemplo, la incógnita x tendrá dos valores iguales á α, y otros dos iguales á β; ó lo que es lo mismo, el primer miembro de la propuesta tendrá estos quatro factores $(x-\alpha)$; $(x-\alpha)$; $(x-\beta)$; $(x-\beta)$.

Cada uno de los factores comunes de los primeros miembros de las tres primeras equaciones anteriores será tres veces factor de la propuesta; es decir, que si los primeros son de la forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, por exemplo, los segundos serán de esta: $(x-\alpha)^3$, $(x-\beta)^3$. Del mismo modo se pueden continuar estas consideraciones hasta donde se quiera.

206 Es muy importante observar que la equacion $A=0$, que por la sustitucion de x en lugar de a viene á ser:

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=0,$$

se deduce inmediatamente de la equacion $V=0$, ó de la propuesta

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

multiplicando cada término de esta última por el exponente de la potencia de x que se halla en él, y rebaxando una unidad al mismo exponente: acerca de lo qual se debe advertir que siendo el término U equivalente á $U\times x^0$, no debe producir en esta operacion término alguno, porque uno de sus factores deberia ser *cero*, es decir, el exponente que en la equacion propuesta tiene la x. De la equacion $A=0$ se deduce la siguiente $B=0$, del mismo modo que $A=0$ se deduce de $V=0$; de $B=0$ se deduce $C=0$, lo mismo que de $A=0$ se deduxo $B=0$; y así sucesivamente *.

* En la mayor parte de los libros elementales se demuestra, bien que de un modo muy incompleto, que el divisor comun de los primeros miembros de las equaciones $V=0$ y $A=0$ contiene los factores iguales del primer miembro de la propuesta elevados á una potencia cuyo ex-

207 Con el objeto de aclarar mas esta doctrina por medio de un exemplo, propongámonos averiguar si hay ó no raices iguales en la equacion

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0.$$

En este caso la equacion $A = 0$ viene á ser:

$$[illegible]x^4 - 52x^3 + 201x^2 - 342x + 216 = 0;$$

[illegible] los primeros miembros de la propuesta y de [illegible] $x^2 + 2[illegible]x - 18$. Siendo del tercer grado este [illegible]tener varios factores; es pues necesario indagar si [illegible] de ellos es tambien divisor exâcto del primer miembro de la [illegible]ion $B = 0$, la qual es en este caso:

$$20x^3 - 156x^2 + 402x - 342 = 0;$$

[illegible]cha la investigacion, hallarémos que el binomio $x - 3$ es factor [illegible]n de B y del divisor que antes hemos hallado. Esto equivale á [illegible]que $x - 3$ es el máxîmo divisor comun de V, de A y de B; y [illegible]uí inferirémos que el primer miembro V de la equacion pro[illegible]sta tiene por factor á $(x - 3)^3$, ó que la equacion tiene tres rai[illegible] iguales á 3. Dividiendo despues el primer divisor comun por [illegible] quantas veces consecutivas se pueda, es decir, dos veces, resul[illegible]último quociente $x - 2$. Y como este binomio no sea factor comun mas que del primer miembro de la equacion propuesta y del de la equacion $A = 0$, debemos inferir que $(x - 2)^2$ es otro factor del primer miembro de la propuesta, y de consiguiente esta equacion es equivalente á $(x - 3)^3 (x - 2)^2 = 0$.

208 Las raices de la equacion (d) serian las diferencias entre la raiz b y cada una de las otras, si en ella pusiéramos b en lugar de a; las diferencias entre la raiz c y cada una de las otras, si en ella pusiéramos c en lugar de a; y como sin embargo de ser tan diferentes estas sustituciones, conservan estas equaciones la misma forma y los mismos coeficientes, y se refieren todas á la misma equacion propuesta, se puede generalizar la misma equacion (d) de modo que sus raices sean las diferencias de todas las raices de la propuesta com-

ponente tiene una unidad menos que en la misma propuesta Esto se puede inferir fácilmente de lo anteriormente expuesto; pero hemos creido mas conveniente dexar esta proposicion para el *Complemento*, donde se halla demostrada de un modo que nos parece sencillo y nuevo.

binadas de dos en dos. Para esto bastará eliminar la a de la equacion (d) y de estotra:

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + Ta + U = 0$$

que debe verificarse para que la cantidad representada por a sea raiz de la equacion propuesta; porque no dependiendo el resultado mas que de los coeficientes, y no quedando en él vestigio al[illegible] raiz representada por a, deberá convenir á todas[illegible]

El exponente del grado de la equacion final h[illegible] porque el número de las raices de esta última equac[illegible]

$$a-b,\ a-c,\ a-d \text{ \&c.}$$
$$b-a,\ b-c,\ b-d \text{ \&c.}$$
$$c-a,\ c-b,\ c-d \text{ \&c.}$$

será igual al número de las permutaciones que se pueden formar [illegible] do de dos en dos las m letras a, b, c &c., atendiendo á sus dife[illegible] tes situaciones. Ademas, supuesto que las cantidades $a-b$ y b[illegible] $a-c$ y $c-a$, $b-c$ y $c-b$ &c. solo se diferencian en el si[illegible] prescindiendo de este serán iguales de dos en dos las raices de la [illegible] ma equacion final; por manera que quando hayamos descubierto, [illegible] exemplo, que $y = \alpha$, podrémos tener certeza de que será t[illegible] $y = -\alpha$. De aquí se infiere que no debe esta equacion co[illegible] mas potencias de la incógnita que las de exponente par; porque su primer miembro debe ser el producto de cierto número de factores del segundo grado, tales como $y^2 - \alpha^2 = (y-\alpha)(y+\alpha)$ (§. 184). Así que toda la equacion vendrá á tener esta forma:

$$y^{2n} + py^{2n-2} + qy^{2n-4} \ldots + ty^2 + u = 0;$$

la qual, haciendo $y^2 = z$, se convertirá en estotra: $z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0$; y equivaliendo la incógnita z al quadrado de la y, las raices de la última equacion serán los quadrados de las diferencias de las raices de propuesta.

Conviene observar que siendo precisamente reales las diferencias de las raices reales de la propuesta, serán positivos los quadrados de aquellas diferencias, y que por consiguiente los valores de z serán todos positivos siempre que todas las raices de la equacion propuesta sean reales, ora sean positivas, ora negativas.

Sea, por exemplo, la equacion:

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

y haciendo en ella $x=a+y$, se transformará en estotra:

$$\left.\begin{array}{l} a^3+3a^2y+3ay^2+y^3 \\ -7a-7y \\ +7 \end{array}\right\}=0;$$

y suponiendo que a represente una de las raices de la equacion propuesta, será $a^3-7a+7=0$. Suprimiendo pues este trinomio en la transformada; dividiendo por y los términos restantes, y ordenándolos con respecto á las potencias de a, tendrémos: $3a^2+3ay+y^2-7=0$. Eliminando la a de esta última equacion y de la anterior $a^3-7a+7=0$ procedente de la suposicion de que a es una de las raices de la propuesta, resultará la equacion final $y^6-42y^4+441y^2-49=0$, cuyas seis raices son las diferencias de las raices de la propuesta. Haciendo $z=y^2$, la última equacion se transformará en estotra:

$$z^3-42z^2+441z-49=0$$

cuyas raices serán los quadrados de aquellas diferencias.

209 La sustitucion de $a+y$ en vez de x en qualquiera equacion propuesta:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+U=0 \ (\S.\ 204),$$

sirve tambien algunas veces para hacer que desaparezca uno de los términos de esta equacion. En tal caso se ordenan los términos de la *transformada* con respecto á las potencias de la y; y se considera la cantidad a como una segunda incógnita, cuyo valor se determina igualando á *cero* el coeficiente del término que nos propongamos hacer desaparecer. Por manera que siendo la equacion general *transformada*:

$$\left.\begin{array}{r} y^m+may^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2y^{m-2}\ldots+a^m \\ +Py^{m-1}+(m-1)\,Pay^{m-2}\ldots+Pa^{m-1} \\ +Qy^{m-2}\ldots+Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +U \end{array}\right\}=0,$$

si querémos que desaparezca el segundo término de esta, harémos $ma+P=0$; y deduciéndose de esta suposicion que $a=-\frac{P}{m}$, sustituirémos este valor en la *transformada*, y así no quedarán en ella

mas términos que los que llevan las potencias y^m, y^{m-2}, y^{m-3} &c.

De esto se sigue que *para transformar qualquiera equacion en otra que carezca de segundo término, se debe sustituir en lugar de la primitiva incógnita un binomio compuesto de otra nueva incógnita y de un quebrado cuyo numerador sea el coeficiente del segundo término, y cuyo denominador sea el exponente del primero, anteponiendo á este quebrado el signo contrario al que tenga el mismo segundo término de la equacion propuesta.*

Propongámonos, por exemplo, transformar la equacion $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$ en otra que carezca de segundo término; y conforme á la regla prescrita harémos $x = y - \frac{6}{3} = y - 2$. Sustituyendo este binomio en lugar de la x, y desenvolviendo las potencias, tendrémos la siguiente equacion transformada:

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ + 6y^2 - 24y + 24 \\ - 3y + 6 \\ + 4 \end{array}\right\} = 0,$$

la qual se reduce á $y^3 - 15y + 26 = 0$;
donde no aparece ya el segundo término, es decir, el que deberia contener el quadrado de la nueva incógnita y.

Si la transformada hubiese de carecer de tercer término, esto es, del que contiene la potencia y^{m-2}, igualaríamos á *cero* el conjunto de las cantidades que multiplican esta potencia; y para determinar el valor de a tendríamos que resolver esta equacion de segundo grado: $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (m-1) Pa + Q = 0$.

Del mismo modo, para conseguir que la transformada careciese del quarto término, tendríamos que resolver una equacion de tercer grado; y así sucesivamente, hasta el último término, que no podrá desvanecerse sin determinar el valor de la a por medio de la equacion

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + U = 0$$

absolutamente semejante á la propuesta.

La razon de esta semejanza se descubre con facilidad. Igualar á cero el último término de la equacion transformada, es suponer que uno de los valores de la incógnita y es igual á *cero*; porque en toda

equacion que carece de término enteramente conocido, es *cero* uno de los valores de la incógnita. Y como haciendo $y=0$ en la equacion $x=y+a$ resulta $x=a$, es claro que para hacer desaparecer el último término de la transformada es necesario que la cantidad a sea uno de los valores de x, ó lo que es lo mismo, una de las raices de la primitiva equacion propuesta.

Las varias transformaciones que hasta aquí hemos efectuado con las equaciones, nos pueden haber dado idea de otras muchas por medio de las quales podemos conseguir que las raices de la transformada tengan con las de la propuesta la relacion que queramos.

210 Algunas veces es necesario descomponer el primer miembro de una equacion en factores de un grado superior al primero; y no siéndonos posible explicar aquí con alguna extension los diferentes medios que se pueden emplear para conseguir esta descomposicion, pondrémos solo un exemplo, para dar siquiera á conocer en qué consiste la dificultad de esta investigacion.

Propongámonos hallar los factores de tercer grado del primer miembro de la equacion

$$x^5-24x^3+12x^2-11x+7=0;$$

representemos uno de estos factores por

$$x^3+px^2+qx+r$$

cuyos coeficientes p, q, r son indeterminados, y deben ser tales que el primer miembro de la equacion propuesta sea exâctamente divisible por el factor

$$x^3+px^2+qx+r,$$

con independencia absoluta de los valores que pueda tener la x. Ahora bien, efectuando la division, resulta por residuo

$$-(p^3-2pq-24p+r-12)x^2$$
$$-(p^2q-pr-q^2-24q+11)x$$
$$-(p^2r-qr-24r-7);$$

expresion que no puede desvanecerse por sí misma y con independencia del valor de x, sin que las cantidades representadas por las letras p, q, r sean tales que se reduzcan á *cero* los tres polinomios en que se hallan combinadas en el residuo de la division. Exîge pues la qüestion propuesta que se verifiquen estas tres equaciones:

$$p^3 - 2pq - 24p + r - 12 = 0$$
$$p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 = 0$$
$$p^2r - qr - 24r - 7 = 0.$$

Estas tres equaciones se deben pues mirar como las expresiones algebráicas de las condiciones necesarias para determinar los valores de las incógnitas p, q y r; y á la resolucion de estas equaciones se reduce toda la dificultad de la qüestion propuesta.

Método para resolver por aproxîmacion las equaciones numéricas.

211 Luego que nos hayamos cerciorado de que ninguno de los divisores del último término de una equacion es valor de la incógnita, podemos tener seguridad de que la equacion no tiene raiz alguna comensurable; y ya entonces nos es forzoso recurrir á los métodos de aproxîmacion, los quales estan todos fundados en este principio:

Siempre que hallemos dos cantidades que sustituidas en vez de la incógnita en el primer miembro de una equacion, produzcan dos resultados con signo contrario, podemos tener certeza de que la equacion tiene una raiz real, comprehendida entre las dos cantidades que hayamos sustituido.

Si, por exemplo, en el primer miembro de la equacion $x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0$ sustituimos sucesivamente 2 y 20 en lugar de la x, en vez de reducirse á *cero* como la equacion requiere, resultará -31 de la primera sustitucion, y $+2939$ de la segunda; y de aquí debemos concluir que la equacion propuesta tiene una raiz real comprehendida entre 2 y 20, es decir, mayor que 2 y menor que 20.

Como tendrémos freqüentemente necesidad de expresar estas dos relaciones de desigualdad, harémos de aquí en adelante uso de los signos $>$ y $<$ de que se sirven los algebristas para indicarlas, colocando la cantidad mayor al lado de la abertura del signo; y así escribirémos:

$x > 2$, para indicar que x es mayor que 2;

$x < 20$, para expresar que x es menor que 20.

Para demostrar la proposicion precedente, podrémos hacer el siguiente razonamiento: reuniendo por una parte los términos positivos de la equacion propuesta, y por otra los términos negativos, el primer miembro vendrá á ser:

$$x^3+7x-(13x^2+1).$$

Ahora bien, quando hemos sustituido 2 en lugar de x, el resultado ha sido negativo, porque en esta hipótesis $x^3+7x<13x^2+1$; y salió positivo quando se hizo $x=20$, porque entonces $x^3+7x>13x^2+1$. Vemos, pues, no solo que las dos cantidades representadas por x^3+7x y $13x^2+1$ deben aumentar cada una por su parte quando se sustituyan en vez de x números mayores, sino tambien que la primera aumenta con mas rapidez que la segunda, puesto que de menor que era, ha venido á ser mayor que esta. Los valores que se sustituyan en vez de la x, pueden tomarse tan próxîmos como se quiera unos á otros; y de consiguiente se puede hacer por este medio que las dos cantidades propuestas aumenten por grados tan pequeños como se juzgue conveniente. Si, pues, los grados de aumento de la primera cantidad son mayores que los de la segunda, de modo que no solo compensan el exceso que esta llevaba á aquella, sino tambien hacen que por el contrario la segunda venga á ser menor que la primera; es claro que debe exîstir un momento, por decirlo así, en el qual se igualen ambas cantidades. „No » de otra manera, dice *Lagrange*, que dos móviles que habiendo » partido de dos puntos distintos á un mismo tiempo, corren por » un mismo camino en un mismo sentido con desiguales velocida» des, y llegan á un mismo tiempo á otros dos puntos distintos, pe» ro de modo que el móvil que al principio iba detras, se haya pues» to delante del otro; deben necesariamente haberse reunido en al» gun punto del camino."

Es pues indudable que si dos cantidades sustituidas en lugar de la x producen resultados con signos contrarios, debe por precision exîstir alguna otra cantidad, de cuya sustitucion resulte

$$x^3+7x=13x^2+1,$$

ó lo que es equivalente,

$$x^3+7x-(13x^2+1)=0,$$
$$x^3-13x^2+7x+1=0.$$

La cantidad, sea qual fuere, cuya sustitucion produzca este resultado, es precisamente la *raiz* de la equacion propuesta.

Lo que acabamos de observar en la equacion particular $x^3-13x^2+7x-1=0$, se puede aplicar á qualquiera otra; y para que

sea mas perceptible lo que sobre este particular nos proponemos decir, representarémos por P la suma de todos los términos positivos del primer miembro de la equacion; por N la de los negativos; por a el valor de x, cuya sustitucion ha producido un resultado negativo; y por b el que ha producido un resultado positivo. Como no puedan verificarse estas dos circunstancias sin que en la primera sustitucion sea $P<N$, y en la segunda $P>N$; inferirémos que pues la cantidad que era menor ha venido á ser mayor que la otra, debe exîstir un valor de x mayor que a y menor que b, de cuya sustitucion resultará $P=N$, ó lo que es lo mismo, $P-N=0$.

En vista de este razonamiento podrá parecer necesario que los valores sustituidos en lugar de la x sean ambos positivos ó ambos negativos; porque quando tienen signos diferentes, el valor negativo hace que varíen de signo los términos de la equacion que tengan potencias de exponente impar, y por consiguiente las cantidades representadas por P y N no estan compuestas de un mismo modo en ambas sustituciones. Pero desaparecerá qualquier duda que sobre esto pueda ocurrir, con solo hacer $x=0$; pues de este modo la equacion propuesta se reduce á su último término, y este ha de tener forzosamente un signo contrario al del resultado de alguna de las dos sustituciones que anteriormente suponemos hechas. Sea, por exemplo, la equacion

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0;$$

y haciendo en ella $x=-1$ y $x=2$, se convierte su primer miembro respectivamente en $+12$ y -45. Si á pesar de tener signos contrarios estos resultados, se dudase de que debe exîstir una raiz de la equacion entre -1 y $+2$, supongamos $x=0$, y todo el primer miembro se reducirá á -3; luego las dos sustituciones $x=0$, $x=-1$ dan dos resultados con signos contrarios, y de consiguiente exîstirá entre *cero* y -1 una raiz de la equacion propuesta. Para mayor confirmacion de esto sustituyamos $-y$ en lugar de x; y se transformará la equacion en estotra:

$$y^4+2y^3-3y^2+15y-3=0,$$

en la qual será

$$P=y^4+2y^3+15y; \quad N=3y^2+3.$$

Haciendo $y=0$, será $P<N$; quando $y=1$, será $P>N$.

Se puede, pues, en este caso discurrir del mismo modo que en el anterior, y concluir que la equacion transformada tiene una raiz real comprehendida entre o y + 1; de donde se sigue que la equacion propuesta debe tambien tener una raiz real comprehendida entre o y — 1; y por consiguiente entre los valores + 2 y — 1, que primitivamente se sustituyeron, y que produxeron los resultados + 12 y — 45.

No pudiendo ocurrir mas casos que los que acabamos de exâminar, podemos ya mirar como suficientemente probada la proposicion que intentábamos demostrar.

212 Antes de pasar adelante observarémos que, sean quales fueren el grado y los coeficientes de una equacion, se pueden siempre asignar números que puestos en lugar de la incógnita hagan que el primer término valga mas que la suma de todos los demas. Bien fácil es convencerse de la verdad de esta asercion, en habiendo observado la rapidez con que crecen las diferentes potencias de qualquier número mayor que la unidad (§. 126). Entre estas potencias la mas elevada excede tanto mas á las que le son inferiores quanto mas considerable es el número de que se trata; de manera que este puede ser tal, que el exceso de una de sus potencias sobre cada una de las otras inferiores llegue á ser mayor que qualquier cantidad dada por grande que sea. Veamos, pues, cómo podamos determinar algunos de los números que tengan la condicion enunciada.

Es claro que el caso menos favorable seria aquel en que todos los coeficientes de la equacion fuesen iguales al mayor de ellos; es decir, si en lugar de la equacion

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, + Tx + U = 0,$$

tuviésemos

$$x^n + Sx^{n-1} + Sx^{n-2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, + Sx + S = 0,$$

ó lo que para el caso es lo mismo,

$$x^n - Sx^{n-1} - Sx^{n-2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, - Sx - S = 0,$$

representando por S el mayor de todos los coeficientes $P, Q \ldots. T, U$

Puesto el primer miembro de esta última equacion baxo la forma

$$x^n - S(x^{n-1} + x^{n-2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, + 1),$$

deberémos tener presente que

$$x^{n-1}+x^{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ +1=\frac{x^n-1}{x-1}\ (\S.\ 158);$$

y sustituyendo esta expresion fraccionaria en lugar del polinomio encerrado dentro del paréntesis, se convertirá el primer miembro de la equacion en $x^n-\frac{S(x^n-1)}{x-1}$, ó en $x^n-\frac{Sx^n}{x-1}+\frac{S}{x-1}$; y si ponemos M en lugar de x, resultará:

$$M^n-\frac{SM^n}{M-1}+\frac{S}{M-1};$$

cantidad que será indudablemente positiva si hacemos $M^n=\frac{SM^n}{M-1}$. Si dividimos ahora los dos miembros de esta equacion por M^n, resultará:

$$1=\frac{S}{M-1};\ \text{ó}\ M=S+1.$$

Sustituyendo, pues, en lugar de x el mayor de los coeficientes de la equacion aumentado de una unidad, podemos tener entera seguridad de que el primer término será mayor que la suma de todos los demas.

El número M podrá ser menor que el que acabamos de asignar, siempre que habiendo en la equacion varios términos positivos y otros varios negativos, no fuere nuestro intento hacer que el primer término sea mayor que la suma de todos los demas, sino solo que la suma de los términos positivos sea mayor que la de los negativos; pues para esto bastará hacer que el primer término sea mayor que la suma de los términos negativos; y esto se conseguirá tomando M igual al mayor coeficiente negativo aumentado de una unidad.

Supuesto que en la equacion

$$x^n-Px^{n-1}-Qx^{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ -Tx-U=0,$$

si hacemos $x=0$, se reduce á $-U$ el primer miembro; y si hacemos $x=S+1$, debe ser positivo el resultado de la sustitucion, deberémos inferir que ningun número mayor que $S+1$ podrá ser raiz de la equacion propuesta, y que de consiguiente todas sus raices positivas han de estar precisamente comprehendidas entre 0 y $S+1$. *

* A estos valores, entre los quales estan comprehendidas las raices de una equacion, se les suele llamar *límites* de ellas; sin que por esto deba

Por el mismo medio se puede tambien descubrir un límite de las raices negativas, y para esto sustituirémos $-y$ en lugar de x en la equacion propuesta; y cambiarémos todos los signos de la transformada para hacer positivo el primer término si resultase negativo (§. 178). Por esta transformacion se consigue que los valores positivos de y correspondan á los valores negativos de x, y recíprocamente; y de consiguiente si fuere R el mayor coeficiente negativo de la equacion transformada, será $R+1$ un límite de los valores positivos de y, y por consiguiente $-R-1$ será el de los valores negativos de x.

Por último, si quisiéremos hallar un límite mas próxîmo que *cero* á la menor de las raices, sustituirémos $\frac{1}{y}$ en lugar de x en la equacion propuesta, y prepararémos la transformada con arreglo á lo prescrito (§. 178). Siendo los valores de y inversos de los de x, corresponderá el mayor de los primeros al menor de los segundos, y recíprocamente. Luego si $S'+1$ indicase el límite superior de los valores de y, ó si tuviésemos $y<S'+1$, y de consiguiente $\frac{1}{x}<S'+1$, deducirémos de aquí que $1<(S'+1)x$; y últimamente que $\frac{1}{S'+1}<x$.

En efecto, se ve fácilmente que sin alterar la relacion de desigualdad de dos cantidades separadas por los signos $<$ ó $>$, se las puede multiplicar ó dividir por una misma cantidad, ó se les puede sumar ó restar la misma cantidad; por manera que en las expresiones en que hacemos uso de los signos $>$ y $<$, se verifican en esta parte las mismas propiedades que si en ellas estuviese el signo de igualdad.

entenderse otra cosa sino que ninguna raiz puede llegar á ser igual á ninguno de aquellos valores. En el tratado *de la resolucion de las equaciones numéricas de Lagrange* se pueden ver fórmulas para hallar límites mas próxîmos de las raices que los que nosotros hemos indicado. Sin embargo, lo que hemos dicho basta para hacer ver que las proposiciones fundamentales de la resolucion de las equaciones son independientes de la idea del *infinito*.

213 De lo dicho se sigue que *toda equacion de grado impar tiene precisamente una raiz real con signo contrario al de su último término;* porque si se toma un número M tal que el signo de la cantidad

$$M^n + PM^{n-1} + QM^{n-2} \ldots\ldots + TM \pm U$$

no dependa mas que del de su primer término M^n; en siendo impar el exponente n, será positiva aquella cantidad si el número M es positivo, y negativa si lo fuese el número supuesto; porque en siendo impar el exponente n, será M^n del mismo signo que M. Sentado esto, si el último término U tiene el signo $+$, y se hace $x = -M$, saldrá un resultado con signo contrario al que da el supuesto de $x = 0$; por lo qual se ve que la propuesta tiene una raiz entre 0 y $-M$, es decir, negativa. Si el último término U tuviere el signo $-$, y se hace $x = +M$, se hallará un resultado con signo contrario al de la suposicion de $x = 0$; y por consiguiente en este caso estará comprehendida la raiz entre 0 y $+M$, es decir, será positiva.

214 Quando la equacion propuesta sea de un grado par, permanecerá positivo el primer término M^n, sea qual fuere el signo que se dé á M, y por tanto no podrémos tener certeza alguna, por lo anteriormente expuesto, de la exîstencia de alguna raiz real, siempre que el último término tenga el signo $+$; puesto que, ora se haga $x = 0$, ora $x = \pm M$, se hallará en todos casos un resultado positivo; pero siendo negativo el término U, se hallan haciendo sucesivamente $x = +M$, $x = 0$, $x = -M$, tres resultados precedidos respectivamente de los signos $+$, $-$ y $+$; y por consiguiente la equacion propuesta ha de tener en este caso dos raices reales por lo menos: la una positiva comprehendida entre M y 0, y la otra negativa comprehendida entre 0 y $-M$; luego *toda equacion de grado par, cuyo último término sea negativo, tendrá por lo menos dos raices reales, la una positiva y la otra negativa.*

215 Pasemos ya á resolver por aproxîmacion las equaciones numéricas; y para hacer mas comprehensible lo que dirémos sobre este particular, propongámonos desde luego, por exemplo, resolver la equacion

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

Siendo -4 su mayor coeficiente negativo, debemos inferir (§. 212) que su mayor raiz positiva será menor que 5. Sustituyendo en ella

$-y$ en lugar de x, se transformará la propuesta en estotra:

$$y^4+4y^3+3y+27=0;$$

y teniendo la transformada positivos todos sus términos, es manifiesto que el valor de y debe ser negativo, y por consiguiente el de x ha de ser precisamente positivo. Es, pues, visto que la equacion propuesta no podrá tener raiz alguna negativa, y que todas sus raices reales estan comprehendidas entre 0 y $+5$.

El primer método que se nos ocurre para descubrir límites mas aproxîmados, se reduce á suponer sucesivamente $x=1$; $x=2$; $x=3$; $x=4$; y viendo que dos de estos números, sustituidos en la equacion propuesta dan resultados con signos contrarios, tendrémos en aquellos números otros nuevos límites de las raices. Ahora bien, haciendo en la equacion

$x=1$, se convierte su primer miembro en $+21$;
$x=2$ .... $+5$;
$x=3$ .... -9;
$x=4$ .... $+15$.

Vemos pues que esta equacion tiene dos raices reales, una de ellas comprehendida entre 2 y 3, y la otra entre 3 y 4. Para aproxîmarnos mas á la primera tomarémos el medio 2,5 entre los dos números 2 y 3, entre los quales sabemos que está comprehendida; y haciendo $x=2{,}5$, el resultado de esta sustitucion será:

$$+39{,}0625-62{,}5-7{,}5+27=-3{,}9375;$$

y siendo como es negativo, nos hace ver que la raiz que buscamos se halla entre 2 y 2,5. Tomando un medio entre estos dos números saldrá 2,25; pero dexando por ahora las centésimas, y suponiendo que 2,3 es el valor de x, podemos estar ciertos de que conocemos la raiz que buscábamos, con diferencia de menos de una décima de la unidad; y en caso que deseemos aproxîmarnos mas á la exâctitud, nos podrémos valer del método siguiente debido á *Newton*.

Harémos $x=2{,}3+y$; y al tiempo de sustituir este binomio en la equacion propuesta, tendrémos presente que y representa una fraccion muy pequeña, y que de consiguiente su quadrado y demas potencias superiores son despreciables. De este modo tendrémos:

$$x^4 = (2,3)^4 + 4(2,3)^3 y$$
$$-4x^3 = -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 y$$
$$-3x = -3(2,3) - 3y,$$
$$+27 = +27.$$

Por medio de estas sustituciones se convertirá la equacion propuesta en $-0,5839 - 17,812y = 0$;
de donde se deduce que

$$y = -\frac{0,5839}{17,812}.$$

En esta primera operacion no pasarémos de las centésimas, y resultará:

$$y = -0,03;\quad x = 2,3 - 0,03 = 2,27.$$

Para obtener un nuevo valor de x mas aproxîmado á la exâctitud que el precedente, supondrémos $x = 2,27 + y'$; y sustituyendo este binomio en la equacion propuesta, sin hacer caso mas que de la primera potencia de y', el resultado de la sustitucion será

$$-0,04595359 - 18,046468y' = 0;$$

de donde se infiere que

$$y' = -\frac{0,04595359}{18,046468} = -0,0025;$$

y por consiguiente $x = 2,2675$. Repitiendo estas operaciones podemos por este método aproxîmarnos quanto queramos al verdadero valor de x.

Del mismo modo podemos hallar que el valor aproxîmado de la segunda raiz real comprehendida entre 3 y 4 es $x = 3,6797$, llevando la aproxîmacion hasta las *diezmilésimas* de la unidad.

216 Podrémos venir en conocimiento del grado de aproxîmacion que por este método conseguimos, buscando el límite de los valores de los términos que se desprecian en las sustituciones.

Si la equacion propuesta fuere

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

la sustitucion de $a + y$ en lugar de x dará por resultado el primero que hemos hallado (§. 204), sin haber lugar en él reduccion alguna; porque no siendo a en este caso raiz de la equacion, sino solo un valor aproxîmado de x, no se puede reducir á cero la expresion

$$a^m + Pa^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + Ta + U.$$

Representando esta última por V, la equacion que en el §. citado designamos por (d), se transformará en la siguiente:

$$V+\frac{A}{1}y+\frac{B}{1.2}y^2+\frac{C}{1.2.3}y^3.....+y^m=0;$$

de la qual se deduce que

$$Ay=-V-\frac{B}{1.2}y^2-\frac{C}{1.2.3}y^3.....-y^m;$$

$$y=-\frac{V}{A}-\frac{By^2}{1.2A}-\frac{Cy^3}{1.2.3A}.....-\frac{y^m}{A}.$$

Despreciando las potencias de y superiores á la primera, viene á quedar $y=-\frac{V}{A}$; y el error es

$$-\frac{By^2}{1.2A}-\frac{Cy^3}{1.2.3A}......-\frac{y^m}{A}.$$

En caso que a no difiera del verdadero valor de x mas que en una cantidad menor que $\frac{1}{p}a$, el error será menor que el número que resultaria poniendo $\frac{1}{p}a$ en lugar de y; lo qual daria:

$$-\frac{B}{1.2.A}\left(\frac{a}{p}\right)^2-\frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3....-\frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

Calculando pues esta cantidad en el supuesto de $y=-\frac{V}{A}$, nos cerciorarémos de si es ó no despreciable en comparacion de $\frac{V}{A}$; y quando sea tan considerable que no se la deba despreciar, será necesario buscar para a un número mas inmediato al verdadero valor de x.

Por conclusion, en habiendo determinado algunos valores de y, y', y'' &c. si advertimos que estos valores forman una serie decreciente, no nos debe quedar la menor duda de que nos vamos aproxîmando mas y mas á la exâctitud.

217 El método que acabamos de exponer es conocido con el nombre de *método de las sustituciones sucesivas.* Lagrange lo ha perfeccionado considerablemente en las Memorias de la Academia de Berlin (años de 1767 y 1768). En primer lugar ha observado

que sustituyendo solo números enteros, podia muy bien suceder que pasásemos por encima de muchas raices sin echarlas de ver. Con efecto, si tuviésemos, por exemplo, la equacion

$$(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{2})(x-3)(x-4)=0;$$

y si en lugar de x sustituyésemos los números 0, 1, 2, 3 &c. pasaríamos por encima de las raices $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ sin echar de ver su exîstencia; porque tendríamos:

$$(0-\tfrac{1}{3})(0-\tfrac{1}{2})(0-3)(0-4)=+\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 3\times 4=+2$$
$$(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{2})(1-3)(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 2\times 3=+2;$$

resultados que por ser ambos positivos no pueden indicarnos la exîstencia de raiz alguna, sin embargo de estar comprehendidas dos entre los dos valores sustituidos. Fácil es ver que esto proviene de que la sustitucion de 1 en lugar de x hace variar al mismo tiempo los signos de los dos factores $x-\frac{1}{3}$, $x-\frac{1}{2}$; por manera que siendo ambos negativos quando se ponia *cero* en lugar de x, vienen ambos á ser positivos quando se hace $x=1$; pero si en lugar de x hubiéramos puesto un número comprehendido entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, solo el factor $x-\frac{1}{3}$ hubiera mudado de signo, y se hubiera obtenido un resultado negativo.

Así sucederia precisamente si hubiésemos sustituido en lugar de x números cuya diferencia fuese menor que la de las raices $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Si hubiésemos, por exemplo, sustituido $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ &c. hubieran resultado dos variaciones de signos.

Se podria acaso objetar contra lo que acabamos de decir, que en haciendo desaparecer los coeficientes fraccionarios de una equacion todas sus raices reales han de ser números enteros ó cantidades irracionales y de ningun modo fracciones (§. 197); pero se ve con facilidad que aun las cantidades irracionales, así como las fracciones, pueden ser tales que se diferencien en menos de una unidad.

En general, aunque una equacion tenga muchas raices reales, no aparecerán variaciones de signos que nos las indiquen, siempre que las sustituciones hagan cambiar los signos de un número par de factores. Para evitar este inconveniente, es necesario que cada dos números de los que vayamos sucesivamente sustituyendo, desde el menor límite hasta el mayor, tengan una diferencia menor que la mínima de las diferencias que pueda haber entre dos raices de la equa-

cion propuesta. Por este medio los números que sustituyamos estarán precisamente comprehendidos entre las raices consecutivas; y las sustituciones no harán variar de signo á mas de un factor. Esta operacion no exîge que conozcamos con exâctitud la mínima diferencia de las raices; basta que tengamos conocido un límite al qual no pueda ser inferior.

Para determinar este límite podrémos formar la equacion cuyas raices son los quadrados de las diferencias de las raices de la propuesta (§. 208).

Sea esta equacion

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0 \ldots (D);$$

y para obtener el límite menor de sus raices, harémos (§. 212) $z = \frac{1}{v}$; y la equacion (D) se transformará en estotra:

$$\frac{1}{v} + p\frac{1}{v^{n-1}} + q\frac{1}{v^{n-2}} \ldots\ldots + t\frac{1}{v} + u = 0;$$

y multiplicando por v^n todos los términos, tendrémos la siguiente:

$$1 + pv + qv^2 \ldots + tv^{n-1} + uv^n = 0.$$

Despejando de su coeficiente á v^n, será

$$v^n + \frac{t}{u}v^{n-1} \ldots + \frac{q}{u}v^2 + \frac{p}{u}v + \frac{1}{u} = 0;$$

y si representamos por $\frac{r}{u}$ al mayor coeficiente negativo de esta equacion, tendrémos: $\frac{1}{\frac{r}{u}+1} < z$. No debemos considerar aquí mas que el límite positivo; porque es el único que se refiere á las raices reales de la equacion propuesta.

En conociendo por este medio el límite $\frac{1}{\frac{r}{u}+1} = \frac{u}{r+u}$, menor que el quadrado de la mínima diferencia de las raices de la propuesta, extraerémos de él la raiz quadrada, ó al menos tomarémos el número inmediatamente menor que aquella raiz; y este número, que designarémos por k, nos indicará la diferencia que deberá haber entre cada dos números de los que se han de sustituir. Así

que, formarémos las dos series $0, +k, +2k, +3k, +$ &c. $-k$, $-2k, -3k, -$ &c., de las quales no tomarémos mas términos que los comprehendidos entre los límites, así de las raices positivas como de las negativas de la equacion propuesta; y las variaciones de signos que nos presente la serie de los resultados obtenidos por la sucesiva sustitucion de estos números en lugar de x en la equacion propuesta, nos indicarán sus diferentes raices reales, tanto positivas como negativas.

218 Sea por exemplo la equacion

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

la qual (§. 208) nos ha conducido á la equacion

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

Haciendo en esta $z = \frac{1}{v}$, y ordenando con respecto á las potencias de la v los términos de la transformada, tendrémos:

$$v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0;$$

y como el mayor coeficiente negativo es 9, podemos tener certeza de que $v < 10$, y por consiguiente $z > \frac{1}{10}$; será pues necesario tomar $k = 6 < \frac{1}{\sqrt{10}}$; y esto se conseguiria haciendo $k = \frac{1}{4}$; pero basta suponer $k = \frac{1}{3}$: porque si en la última equacion transformada sustituimos 9 en lugar de v, resulta ya de esta sustitucion una cantidad positiva, y así venimos en conocimiento de que v ha de ser menor que 9, y por consiguiente $z > \frac{1}{9}$; y k podrá ser $= \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$.

El límite mayor de las raices positivas de la equacion propuesta $x^3 - 7x + 7 = 0$ es 8; y -8 es el de las raices negativas; deberémos pues sustituir sucesivamente en lugar de x los números que se hallan en las dos series siguientes:

$$0, \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{3}, \quad \frac{4}{3} \ldots\ldots\ldots \frac{24}{3},$$

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{4}{3} \ldots\ldots -\frac{24}{3}.$$

Podria evitarse el tener que hacer uso de las fracciones haciendo $x = \frac{x'}{3}$, porque entonces las diferencias de los valores de x' serian triples de las de los valores de x; y si estas deben todas ser mayores que $\frac{1}{3}$, aquellas deberán todas ser mayores que la unidad; y de consiguiente si en la equacion primitiva debíamos sustituir sucesivamente las fracciones anteriormente indicadas, deberémos sustituir sucesivamente los números enteros

$$0, \ 1, \ 2, \ 3 \ldots\ldots\ldots \ 24$$
$$-1, -2, -3 \ldots\ldots\ldots -24$$

en la equacion transformada $x'^3 - 63x' + 189 = 0$. Los signos de los resultados de las sustituciones variarán de $+4$ á $+5$; de $+5$ á $+6$; y de -9 á -10: por manera que habrá dos valores positivos y uno negativo:

$$\left.\begin{matrix} x' > 4 \ \text{ y } < 5 \\ x' > 5 \ \text{ y } < 6 \end{matrix}\right\} \text{ y por consiguiente } \left\{\begin{matrix} x > \frac{4}{3} \ \text{ y } < \frac{5}{3}; \\ x > \frac{5}{3} \ \text{ y } < \frac{6}{3}; \end{matrix}\right.$$

y puesto que el valor negativo de x' se halla entre -9 y -10, se hallará el de x entre $-\frac{9}{3}$ y $-\frac{10}{3}$.

Ahora que ya conocemos las diferentes raices de la equacion propuesta con diferencia de menos de $\frac{1}{3}$ de la unidad, podrémos aproxîmarnos mas al verdadero valor de ellas por el método prescrito (§. 215.)

219 Lo que hemos practicado en los exemplos que nos hemos propuesto, se podrá igualmente executar con una equacion de qualquier grado, y por este medio vendrémos en conocimiento de los valores aproxîmados de todas sus raices reales. Es verdad que en siendo algo elevado el grado de la equacion, es por lo comun muy largo y penoso el cálculo *; pero ademas de que en algunos casos no será necesario recurrir á la equacion (D), en otros podrémos valer-

* En el tratado de la *resolucion numérica de las equaciones* se podrá ver tambien un método dado por *Lagrange* para evitar el uso de la equacion (D).

nos, en vez de ella, de algunos otros medios que el estudio de los ramos ulteriores del analisis nos dará á conocer.

Por otra parte harémos notar que las sustituciones sucesivas de los números enteros 0, 1, 2, 3 &c. en lugar de x ofrecen en muchas ocasiones indicios suficientes para hacer sospechar que exîsten algunas raices cuya diferencia es menor que la unidad. En el último exemplo los resultados de aquellas sustituciones serian $+7$, $+1$, $+1$, $+13$ &c.; y viendo que primeramente van disminuyendo y despues aumentando, tenemos fundamento para creer que entre los dos números sustituidos $+1$ y $+2$ podrá haber dos raices iguales ó casi iguales. Para salir de esta duda es muy buen medio sustituir en lugar de la incógnita primitiva otra cuyos valores sean multiplos de los de aquella. Haciendo por exemplo $x = \frac{y}{10}$, se transforma la equacion propuesta en estotra:

$$y^3 - 700y + 7000 = 0;$$

la qual no es dificil ver que tiene dos raices positivas; una entre 13 y 14, y otra entre 16 y 17. Y no se crea que para descubrir la exîstencia de estas raices ha sido necesario hacer muchas sustituciones; porque si en la equacion propuesta sospechábamos que las raices exîstian entre 1 y 2, en la transformada deberán exîstir, en caso que las haya, entre 10 y 20; y en habiendo determinado, segun lo hemos hecho, que uno de los valores de y se halla entre 13 y 14, y el otro entre 16 y 17, sabrémos que uno de los valores de x se halla entre 1,3 y 1,4, y otro entre 1,6 y 1,7; es decir, conocerémos ya las dos raices positivas de la equacion propuesta con diferencia de menos de una décima de la unidad.

220 Quando los coeficientes de una equacion que nos propongamos resolver sean números muy considerables, será muy conveniente transformarla en otra cuyos coeficientes sean mucho mas pequeños; y esto se consigue sustituyendo en lugar de la incógnita primitiva otra que sea parte aliquota de ella. Si tuviésemos, por exemplo,

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0,$$

haríamos $x = 10z$, y resultaria:

$$z^4 - 8z^3 + 19{,}98z^2 - 14{,}937z + 0{,}5 = 0;$$

y si en vez de esta equacion tomamos estotra

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0{,}5 = 0$$

que apenas se diferencia de la anterior; viendo, como no es dificil ver, que z tiene dos valores reales comprehendidos entre 0 y 1, y entre 1 y 2; podrémos seguramente inferir que la primitiva incógnita x tiene otros dos valores reales comprehendidos entre 0 y 10, y entre 10 y 20.

221 *Lagrange* ha dado á este método de las sustituciones sucesivas una forma que tiene la ventaja de darnos á conocer inmediatamente despues de cada operacion, quánto nos hemos aproxîmado al verdadero valor de la raiz, y por otra parte no exîge que conozcamos previamente el valor aproxîmado con diferencia de menos de una décima.

Representemos por a el número entero proxîmamente menor que la raiz buscada; y como lo que en tal caso nos falta para determinarla con exâctitud, deba ser una fraccion, hagamos $x = a + \frac{1}{y}$; y sustituyamos este binomio en la propuesta. De este modo la equacion transformada deberá tener precisamente alguna raiz mayor que la unidad; llamando b al número entero proxîmamente menor que esta raiz de la transformada, resultará por segunda aproxîmacion $x = a + \frac{1}{b}$. Pero siendo b con respecto á y lo que a era con respecto á x, se podrá en la equacion transformada hacer $y = b + \frac{1}{y'}$; y la nueva equacion transformada tendrá forzosamente una raiz mayor que la unidad. Llamando b' al número entero proxîmamente menor que esta raiz, tendrémos:

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{bb' + 1}{b'}.$$

Poniendo este valor en la expresion del de x, resultará:

$$x = a + \frac{b'}{bb' + 1};$$

y este será el tercer valor aproxîmado de x. Del mismo modo podrémos hallar el quarto haciendo $y' = b' + \frac{1}{y''}$; y representando

por b'' el número entero próxîmamente menor que y'', tendrémos:

$$y' = b' + \frac{1}{b''} = \frac{b'b'' + 1}{b''};$$

de donde se infiere que

$$y = b + \frac{b''}{b'b'' + 1} = \frac{bb'b'' + b'' + b}{b'b'' + 1},$$

y por último

$$x = a + \frac{b'b'' + 1}{bb'b'' + b'' + b};$$

y así sucesivamente.

222 Apliquemos este método á la equacion $x^3 - 7x + 7 = 0$. Ya hemos visto (§. 218) que la menor de las raices positivas de esta equacion está comprehendida entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$, es decir, entre 1 y 2; hagamos pues $x = 1 + \frac{1}{y}$; y tendrémos:

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

El límite de las raices positivas de esta última equacion es 5; y sustituyendo sucesivamente 0, 1, 2, 3, 4 en lugar de y, se echará pronto de ver que tiene dos raices mayores que la unidad; de las quales la una se halla entre 1 y 2, y la otra entre 2 y 3. De aquí resultará pues $x = 1 + \frac{1}{1}$; $x = 1 + \frac{1}{2}$; es decir, $x = 2$, y $x = \frac{3}{2}$.

Estos dos valores corresponden á los que antes hemos ya hallado entre $\frac{6}{3}$ y $\frac{5}{3}$, entre $\frac{5}{3}$ y $\frac{4}{3}$, y cuya diferencia no llega á una unidad.

Para aproxîmarnos mas al verdadero valor de la primera raiz que corresponde á $b = 1$, harémos $y = 1 + \frac{1}{y'}$, y tendrémos:

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Como la única raiz que esta equacion tiene mayor que la unidad está comprehendida entre 2 y 3, vendrá á ser $y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; y de consiguiente $x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Suponiendo despues $y' = 2 + \frac{1}{y''}$,

resultará:

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0.$$

La única raiz que esta equacion tiene mayor que la unidad se halla entre 4 y 5; tomando pues el límite menor 4, resultará:

$$y' = 2 + \frac{1}{4};\ y = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9};\ x = 1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13}.$$

Ya no puede ocultarse quán fácil seria continuar por el mismo método la aproxîmacion haciendo $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, y así sucesivamente.

Volvamos ahora al segundo valor de x, que por la primera aproxîmacion sabemos ser $\frac{3}{2}$, y que corresponde á $b = 2$; hagamos $y = 2 + \frac{1}{y'}$; sustituyámoslo en la primera equacion transformada, y tendrémos despues de haber mudado los signos para hacer positivo el primer término:

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Esta equacion no tiene, así como su correspondiente en la operacion anterior, mas de una raiz mayor que la unidad, la qual se halla entre 1 y 2. Haciendo $b' = 1$, resultará $y = 3$; $x = \frac{4}{3}$. Haciendo del mismo modo $y' = 1 + \frac{1}{y''}$, y sustituyendo en la segunda transformada, tendrémos:

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

cuya equacion tiene una sola raiz entre 4 y 5; y de consiguiente $y' = \frac{5}{4}$; $y = \frac{14}{5}$; $x = \frac{19}{14}$. Si quisiéremos continuar la aproxîmacion, harémos $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, y así sucesivamente.

La equacion $x^3 - 7x + 7 = 0$ tiene ademas una raiz negativa comprehendida entre -3 y -4. Para aproxîmarnos mas á su verdadero valor, harémos $x = -3 - \frac{1}{y}$; lo qual dará:

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0;\ y > 20 \text{ y } < 21;$$

de lo qual resultará:

$$x = -3 - \frac{1}{20} = -\frac{61}{20}.$$

Para pasar mas adelante supondrémos $y = 20 + \frac{1}{y'}$ &c., y obtendrémos sucesivamente valores cada vez mas aproxîmados á la exâctitud.

Las diferentes equaciones transformadas, cuyas respectivas incógnitas son y, y', y'' &c., no tendrán jamas mas de una raiz mayor que la unidad, mientras la propuesta no tenga mas de una raiz comprehendida entre los límites a y $a+1$; pero si la equacion primitiva tuviere dos ó mas raices comprehendidas entre estos mismos límites, como ha sucedido en el exemplo anterior, algunas de las equaciones transformadas tendrán dos ó mas raices mayores que la unidad, las quales darán orígen á diferentes series de nuevas equaciones transformadas, por cuyo medio nos irémos aproxîmando mas y mas al verdadero valor de cada una de las varias raices que la propuesta tenga comprehendidas entre los límites a y $a+1$.

Para exercicio de nuestros lectores les propondrémos la equacion

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

la qual tiene una raiz real comprehendida entre 2 y 3. Y puesto que los valores enteros de y, y' &c. serán 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 &c. los correspondientes valores aproxîmados de x vendrán á ser:

$$\frac{2}{1};\ \frac{21}{10};\ \frac{23}{11};\ \frac{44}{21};\ \frac{111}{53};\ \frac{155}{74};\ \frac{576}{275};\ \frac{731}{349};\ \frac{1307}{624};\ \frac{16415}{7837}.$$

Despues de haber expuesto los métodos para hallar las raices reales comensurables é incomensurables de las equaciones numéricas, parecia natural que indicásemos cómo se hallan las imaginarias; pero como esta indagacion requiere algunos otros conocimientos previos, hemos creido conveniente dexarla para el *Complemento*.

De las proporciones y progresiones.

223 Hemos visto en la Aritmética la definicion y las propiedades fundamentales de la *proporcion* y de la

equidiferencia, es decir, de las combinaciones de cantidades que hasta ahora se conocian con los nombres de *proporcion geométrica y proporcion aritmética.* Ahora aplicarémos el Algebra á aquellas primeras nociones, y por este medio deducirémos de ellas algunos resultados que son de un uso freqüente en la Geometría.

Observarémos en primer lugar que tanto la equidiferencia como la proporcion se pueden representar por medio de equaciones. Sean, por exemplo, A, B, C, D los quatro términos de la primera, y a, b, c, d los de la segunda; y con arreglo á lo expuesto (*Aritm.* §§. 127 y 111) deberémos tener $B-A=D-C$; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; de cuyas equaciones, equivalentes á las expresiones

$$A.B:C.D;\ a:b::c:d;$$

se deducen fácilmente estotras dos:

$$A+D=B+C;\ ad=bc;$$

las quales nos manifiestan que *en la equidiferencia la suma de los términos extremos es igual á la de los términos medios; y que en la proporcion el producto de los términos extremos es igual al de los términos medios*, como lo hicimos ver en la Aritmética (§§. 127 y 113) por razonamientos enunciados en idioma vulgar, y que en las equaciones acabamos de traducir al lenguage algebráico.

Las proposiciones inversas de las precedentes se demuestran con suma facilidad; porque de las equaciones $A+D=B+C$; $ad=bc$; se deduce inmediatamente $D-C=B-A$; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; y por consiguiente *siempre que tengamos quatro cantidades tales que dos de ellas*

den la misma suma ó el mismo producto que las otras dos, las primeras será los medios, y las segundas los extremos, ó al contrario, de una equidiferencia ó de una proporcion.

Quando es $B=C$ se llama *continua* la equidiferencia, y lo mismo se dice de la proporcion quando $b=c$; y tenemos entonces $A+D=2B$; $ad=b^2$; es decir, que *en una equidiferencia continua la suma de los extremos es igual al duplo del término medio; y que en una proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio.* De esto se infiere que $B=\frac{A+D}{2}$; y $b=\sqrt{ad}$; la cantidad B es el *medio* ó la media proporcional aritmética entre A y D; y la cantidad b es la media proporcional (*geométrica*) entre a y d.

Las equaciones fundamentales

$$B-A=D-C;\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

nos conducen tambien á las siguientes

$$C-A=D-B;\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b};$$

lo qual manifiesta que en las expresiones $A.B:C.D$, y $a:b::c:d$ pueden cambiar de lugar los medios, y así resultarán $A.C:B.D$, $a:c::b:d$. En general se podrán con los quatro términos hacer todas las transposiciones, en las quales se conserven las equaciones $A+D=B+C$, y $ad=bc$ (*Aritm.* §. 114).

Dexando ya la equidiferencia continuemos exponiendo las propiedades de la proporcion.

224 A los dos miembros de la equacion $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

se les puede añadir ó quitar una misma cantidad m, de manera que tengamos $\frac{b}{a}\pm m=\frac{d}{c}\pm m$. Reduciendo á fracciones los dos miembros, la equacion vendrá á ser $\frac{b\pm ma}{a}=\frac{d\pm mc}{c}$; de la qual se deduce estotra $\frac{c}{a}=\frac{d\pm mc}{b\pm ma}$; y esta se puede desenvolver y transformar en la siguiente proporcion: $b\pm ma : d\pm mc :: a : c$; y siendo $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, tendrémos igualmente: $\frac{d\pm mc}{b\pm ma}=\frac{d}{b}$, ó $b\pm ma : d\pm mc :: b : d$.

Las dos últimas proporciones que hemos deducido de la primitiva, se pueden enunciar de esta manera: *El primer conseqüente mas ó menos cierto número de veces su antecedente es al segundo conseqüente mas ó menos el mismo número de veces su antecedente, como el primer término es al tercero, ó como el segundo es al quarto.*

Comparando separadamente las sumas entre sí, y las diferencias tambien entre sí, tendrémos $\frac{d+mc}{b+ma}=\frac{c}{a}$; $\frac{d-mc}{b-ma}=\frac{c}{a}$; de donde se concluirá $\frac{d+mc}{b+ma}=\frac{d-mc}{b-ma}$, es decir, $b+ma : d+mc :: b-ma : d-mc$; ó mudando de lugar los medios, $b+ma : b-ma :: d+mc : d-mc$; y si hacemos $m=1$, tendrémos solamente $b+a : b-a :: d+c : d-c$, lo qual se enuncia de esta manera:

La suma de los dos primeros términos es á su diferencia como la suma de los dos últimos es a su diferencia.

225 Pudiendo la proporcion $a : b :: c : d$ escribirse

de esta manera $a:c::b:d$, resultará $\frac{c}{a}\pm m=\frac{d}{b}\pm m$; de donde $\frac{c\pm ma}{a}=\frac{d\pm mb}{b}$; y en fin $c\pm ma:d\pm mb::a:b$; ó $::c:d$, de donde resulta que *el segundo antecedente mas ó menos un cierto número de veces el primero es al segundo conseqüente mas ó menos el mismo número de veces el primero, como qualquiera de los antecedentes es á su conseqüente.*

Esta proposicion se puede tambien deducir inmediatamente de la del párrafo anterior; porque mudando de lugar los medios de la proporcion primitiva $a:b::c:d$, y aplicándole despues la proposicion citada, tenemos sucesivamente $a:c::b:d$; $c\pm ma:d\pm mb::a:b$ ó $::c:d$, y dando en esta última á las letras a, b, c, d las denominaciones que tienen en la proporcion primitiva, resulta la misma conseqüencia que antes.

Haciendo $m=1$ se sacarán las proporciones particulares $c\pm a:d\pm b::a:b::c:d$; $c+a:c-a::d+b:d-b$; lo qual quiere decir que *la suma ó la diferencia de los antecedentes es á la suma ó á la diferencia de los conseqüentes como un antecedente es á su conseqüente*; y que *la suma de los antecedentes es á su diferencia como la de los conseqüentes es á su diferencia.*

En general, si tenemos $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}=\frac{h}{g}$ &c., y hacemos $\frac{b}{a}=q$, resultará $\frac{d}{c}=q$, $\frac{f}{e}=q$, $\frac{h}{g}=q$ &c.; lo qual dará $b=aq$; $d=cq$; $f=eq$; $h=gq$ &c., y sumando por una parte los primeros miembros de estas equaciones, y por otra los segundos, tendrémos $b+d+f+h=aq+cq+eq+gq$; ó $b+d+f+h=q(a+c+e+g)$;

de donde se sigue $\frac{b+d+f+h}{a+c+e+g}=q=\frac{b}{a}$.

Este resultado se enuncia diciendo que *en una serie de razones iguales ó de cantidades proporcionales* $a:b::c:d::e:f::g:h$ &c. *la suma de un número qualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de conseqüentes como un antecedente es a su conseqüente.*

226 Quando hay dos equaciones $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ y $\frac{f}{e}=\frac{h}{g}$ se pueden multiplicar entre sí los primeros miembros, y lo mismo los segundos, y resulta otra nueva equacion $\frac{bf}{ae}=\frac{dh}{cg}$, equivalente á esta proporcion $ae:bf::cg:dh$, la qual hubiera resultado igualmente multiplicando cada término de la primera proporcion....... $a:b::c:d$, por el que le corresponde en la segunda $e:f::g:h$.

Quando se multiplican los términos de una proporcion, cada uno por su correspondiente de otra, se dice que las dos proporciones estan *multiplicadas ordenadamente*; los productos que resultan estan, como se ve, en proporcion: y las nuevas razones son las razones *compuestas* de las razones primitivas (*Aritm.* §. 166).

Tambien es fácil demostrar que de dos proporciones se puede deducir otra nueva dividiendo *ordenadamente* los términos de una de las primitivas por los de la otra.

227 Como de la equacion $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$ se infiere esta otra $\frac{b^m}{a^m}=\frac{d^m}{c^m}$, la qual equivale á esta proporcion $a^m : b^m : c^m : d^m$, podrémos establecer por principio ge-

neral que los *quadrados, los cubos y en general las potencias de un mismo grado de quatro cantidades proporcionales estan tambien en proporcion.*

De la misma equacion $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ se deduce $\sqrt[m]{\frac{b}{a}}=\sqrt[m]{\frac{d}{c}}$; y como esta es equivalente á $\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}=\frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}}$, tendrémos esta proporcion $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$, la qual nos viene á decir *que las raices de un mismo grado de quatro cantidades proporcionales permanecen tambien en proporcion.*

Tales son las principales propiedades de las proporciones, cuya teoría no ha tenido otro objeto que el de descubrir unas cantidades por medio de su comparacion con otras. En el dia se hace ya poco caso de ciertas denominaciones latinas que se habian impuesto á las diferentes variaciones ó transformaciones que puede experimentar una proporcion; y aun llegaria á inutilizarse enteramente todo el aparato de la doctrina de las proporciones si en su lugar se pusiesen las equaciones correspondientes; lo qual daria en mi sentir mas uniformidad á los métodos y mas claridad á la ideas.

228 De las proporciones es muy fácil pasar á las progresiones; porque habiéndonos ya imaginado en la equidiferencia continua tres cantidades tales, que la tercera exceda á la segunda tanto como esta á la primera, se nos ocurre inmediatamente considerar un número indefinido de cantidades a, b, c, d &c. tales que cada una de ellas lleve á la que la precede el mismo exceso δ; de manera que sea $b=a+\delta$; $c=b+\delta$; $d=c+\delta$;

$e=d+\delta$ &c. Para indicar que estas cantidades tienen esta particularidad se las escribe así $\div a.b.c.d.e.f$ &c.; y la combinacion de todas ellas se llama *progresion aritmética;* pero he creido deber mudar este nombre en el de *progresion por diferencias* (Véase *Aritm. nota* del §. 175).

Siendo $c=b+\delta$; si en esta expresion sustituimos en lugar de b la expresion equivalente $a+\delta$, vendrá á ser $c=a+2\delta$; y puesto que $d=c+\delta$, si sustuimos $a+2\delta$ en lugar de c, será $d=a+3\delta$; del mismo modo hallarémos que $e=a+4\delta$, y así sucesivamente; de lo qual se infiere que representando por n al número que designe el lugar que en la progresion ocupe un término qualquiera, que llamarémos l, será $l=a+(n-1)\delta$; con cuya fórmula se podrá calcular un término qualquiera de la progresion, sin necesidad de tener conocidos los términos intermedios.

Sea, por exemplo, la progresion

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . \&c.;$$

en la qual el primer término $a=3$; la diferencia comun $\delta=2$; y si queremos determinar el octavo término será $3+(8-1)2=17$, es decir, el mismo que hemos hallado, calculando sucesivamente todos los que le preceden.

La progresion que nos hemos propuesto por exemplo, se llama *creciente*, porque van creciendo sus términos; pero vendrá á ser *decreciente* con solo escribirla en órden inverso, como aquí se ve:

$$\div 17 . 15 . 13 . 11 . 9 . 7 . 5 . 3 . -1 . -3 \ \&c.$$

Tambien es fácil hallar en esta qualquier término por medio de la fórmula $a+(n-1)\delta$, en teniendo presente que en este caso es sustractiva ó negativa la diferencia comun δ; porque aquí se debe restar de cada término la diferencia para hallar el término siguiente.

Con igual facilidad se puede conocer la suma de qualquier número de términos de qualquiera progresion por diferencias. Representando esta progresion por

$$\div a.b.c..........i.k.l,$$

y designando por S la suma de todos sus términos, tendrémos:

$$S=a+b+c..........+i+k+l.$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de esta equacion en un órden inverso del anterior tendrémos tambien

$$S=l+k+i..........+c+b+a:$$

sumando estas dos equaciones y reuniendo los términos que se corresponden, resultará:

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Ahora bien, por la naturaleza de la progresion tenemos, procediendo desde el primer término hasta el último:

$$a+\delta=b;\ b+\delta=c;......i+\delta=k;\ k+\delta=l,$$

y por la inversa, procediendo desde el último al primero:

$$l-\delta=k;\ k-\delta=i......c-\delta=b;\ b-\delta=a;$$

y sumando estas últimas equaciones con las anteriores, verémos que $a+l=b+k=c+i$ &c.; es decir, *que en qualquiera progresion por diferencias la suma de los términos extremos es igual á la suma de otros dos qualesquiera términos equidistantes de los extremos*, y de consiguiente

$$2S = n(a+l);$$

de donde se deduce que

$$S = \frac{n(a+l)}{2}.$$

Aplicando esta fórmula á la progresion $\div$ 3.5.7.9. &c. hallarémos que la suma de los ocho primeros términos es $= \frac{(3+17)8}{2} = 80$.

230 Las dos equaciones $l = a + (n-1)\delta$; y $S = \frac{(a+l)n}{2}$, combinadas nos presentan el medio de hallar dos de las cinco cantidades a, δ, n, l y S, en estando conocidas las otras tres; pero como son demasiado fáciles estas aplicaciones, nos parece inútil que nos detengamos á tratar de cada uno de los diferentes casos particulares que pueden ocurrir.

231 Así como la *equidiferencia continua* dió motivo para imaginar la progresion por diferencias, la proporcion continua dió orígen á la progresion por quocientes ó sea la progresion *geométrica*; la qual viene á ser una combinacion ó serie de términos tales, que el quociente de qualquiera de ellos dividido por el que le precede, es siempre uno mismo, sea qual fuere el lugar de la serie donde se tomen los dos términos que hayan de ser dividendo y divisor. Así que las dos series

$$\because 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \&c.$$

$$\because 45 : 15 : 5 : \frac{5}{3} : \frac{5}{9} : \&c.$$

son progresiones geométricas ó por quocientes; porque si dividimos qualquier término de la primera por el

que le preceda, el quociente es 3; y en la segunda es $\frac{1}{3}$; la primera es *creciente*, y la segunda *decreciente*. Cada una de estas progresiones forma una serie de razones iguales, y por eso se las escribe como se ha visto.

Sean $a, b, c, d.....................k, l,$

los términos de una progresion por quocientes: haciendo $\frac{b}{a}=q$, tendrémos por la naturaleza de esta progresion

$$q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}....=\frac{l}{k};$$

y de consiguiente

$$b=aq;\ c=bq;\ d=cq;\ e=dq;......\ l=kq.$$

Poniendo sucesivamente el valor de b en el de c, este en el de d, y así sucesivamente, resultarán las siguientes expresiones:

$$b=aq;\ c=aq^2;\ d=aq^3;\ e=aq^4;......l=aq^{n-1},$$

representando por n el número que designa el lugar que en la serie ocupa el término l; ó el número de los términos que se consideran en la progresion propuesta.

Por medio de la fórmula $l=aq^{n-1}$ se puede calcular qualquier término sin necesidad de conocer los términos intermedios. Por exemplo, el décimo término de la progresion $\div\!\div$ 2 : 6 : 18 : &c. es igual á $2\times 3^9=39366$.

232 Tambien se puede obtener la suma de todos los términos que se quieran de la progresion

$$\div\!\div\ a : b : c : d : \&c.$$

sumando ordenadamente las equaciones

$$b=aq;\ c=bq;\ d=cq;\ e=dq;......l=kq;$$

porque resultará:

$$b+c+d+e......+l=(a+b+c+d......+k)q;$$

y representando por S la suma cuyo valor buscamos, tendrémos:

$$b+c+d+e......+l=S-a;$$
$$a+b+c+d......+k=S-l;$$

de donde concluirémos $S-a=q(S-l)$, y por consiguiente $S=\frac{ql-a}{q-1}$.

Si por exemplo quisiéremos hallar la suma de los diez primeros términos de la progresion

$$\div 2 : 6 : 18 : \&c.,$$

la fórmula anterior nos dará:

$$\frac{2\times 3^{10}-2}{2}=3^{10}-1=59048.$$

233 Las dos equaciones

$$l=aq^{n-1};\quad S=\frac{ql-a}{q-1};$$

contienen las relaciones que entre sí tienen las cinco cantidades a, q, n, l, S de qualquiera progresion por quocientes, y nos darán á conocer dos qualesquiera de estas cantidades en estando conocidas las otras tres.

234 Si en la expresion que hemos hallado de S, se sustituye aq^{n-1} en lugar de l, resultará:

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

Siempre que sea creciente la progresion, y de consiguiente sea $q>1$, será la cantidad q^n tanto mayor quanto mas considerable sea el número n; y podrá S ser mayor que qualquiera cantidad por grande que sea, con tal que se dé á n un valor conveniente; es decir, con tal que se tome un número suficiente de términos de la progresion propuesta. Pero si la progresion fuere

decreciente, ó lo que es lo mismo, si q fuere una fraccion, representada por $\frac{1}{m}$, tendrémos:

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1};$$

y es evidente que quanto mayor vaya siendo el número n, tanto menor se hará el término $\frac{a}{m^{n-1}}$; y por consiguiente tanto mas se aproxîmará el valor de S á la cantidad $\frac{am}{m-1}$, de la qual solo se diferencia en......

$\frac{a}{(m-1)\,m^{n-1}}$: luego quantos mas términos se tomen de la progresion, tanto mas se acercará su suma á $\frac{am}{m-1}$; y aunque jamas podrá ser exâctamente igual á esta cantidad, podrá aproxîmarse á ella de modo que la diferencia sea menor que qualquiera cantidad por pequeña que sea.

Es pues la cantidad $\frac{am}{m-1}$, que representarémos por L, no la suma sino el límite de la suma de la progresion decreciente; porque las diferentes sumas parciales que hemos representado por S, se aproxîman mas y mas á aquella cantidad sin poder jamas igualarse con ella.

Aplicando estas consideraciones á la progresion $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$: &c. tendrémos $a = 1$; $q =$

$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$; de donde $m=2$; $L=\frac{am}{m-1}=2$; lo qual nos viene á decir que quantos mas términos se tomen de la anterior progresion, tanto mas se acercará su suma á ser igual á 2. Hallamos con efecto

$$1 \ldots\ldots\ldots = 1 = 2 - 1$$

$$1+\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \ldots\ldots = \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{16}$$

&c.

La cantidad L se suele mirar como la suma de la progresion decreciente por quocientes, continuada al *infinito*; pero no podemos formarnos una idea bien clara del significado de esta expresion, como no entendamos por ella lo que designamos con la voz *límite* (*Aritm.* §. 101.)

235 De la expresion $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ se pueden sacar todos los términos que componen la progresion cuya suma representa; porque si se efectúa la division de q^n-1 por $q-1$ (§. 158) hallarémos:

$\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+q^3+q^4 \ldots\ldots\ldots +q^{n-1}$; lo qual da $S=a+aq+aq^2+aq^3 \ldots\ldots\ldots +aq^{n-1}$.

La expresion del valor de L produce el mismo resultado efectuando la division de m por $m-1$ del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} m & m-1 \\ \hline -m+1 & 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\&c. \end{array}$$

$$-1+\frac{1}{m}$$

$$-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$$

$$-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}$$

&c.

Se divide primeramente m por el primer término del divisor, segun se hace comunmente, y sale 1 de quociente; se multiplica este quociente por el divisor, y se resta el producto del dividendo; se divide despues el residuo 1 por el primer término del divisor; y sale por quociente $\frac{1}{m}$, que se multiplica por el divisor, y resulta el residuo $\frac{1}{m}$; con el qual se executa igual operacion que con el anterior. Continuando de esta manera se echa de ver al instante la ley que siguen todos los quocientes parciales, y se ve que la expresion $\frac{m}{m-1}$ es equivalente á la serie $1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+$ &c., continuada al infinito; y si en cada uno de los términos restituimos q en lugar de $\frac{1}{m}$, y los multiplicamos todos por a, se vuelve á hallar $a+aq+aq^2+aq^3+$ &c., es decir, la progresion cuyo límite hemos designado por L.

236 Una vez que efectuando la division que está

indicada en la expresion fraccionaria $\frac{m}{m-1}$, resulta por quociente la serie interminable

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\&c.;$$

es claro que ningun número de estos términos, por grande que sea, podrá jamas equivaler exâctamente á la fraccion $\frac{m}{m-1}$, sea qual fuere el valor de m ó de $\frac{1}{m}$; pero tambien es fácil ver que en siendo $m>1$ y de consiguiente $\frac{1}{m}<1$, cada uno de los términos de la serie será tanto menor quanto mas diste del primero; la suma de un cierto número de ellos se aproxîmará tanto mas á equivaler exâctamente á $\frac{m}{m-1}$, quanto mayor sea el número de términos que se hayan sumado; y la aproxîmacion será tanto mas rápida quanto menor que la unidad sea $\frac{1}{m}$. En tal caso se llama *convergente* la serie.

Con efecto, si en la division precedente nos limitásemos á tomar el primero ó los dos primeros ó los tres primeros &c. términos del quociente, y al mismo tiempo tenemos presentes los residuos, vendrán á ser

Quocientes.	Residuos.
1	1
$1+\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
&c.	

Ahora bien, los quocientes parciales que acabamos de indicar no pueden aproxîmarse al verdadero valor de $\frac{m}{m-1}$, sino á proporcion que sean despreciables los residuos que les correspondan; y como esta circunstancia se verifica solo quando m es mayor que la unidad, solo en este caso será convergente la serie. En todos los demas casos los residuos van creciendo mas y mas; de consiguiente cada vez van siendo menos despreciables; quantos mas términos tomemos de la serie, mas no alejamos del verdadero valor de $\frac{m}{m-1}$, y por esta razon se llama *divergente* la serie.

Para aclarar mas esto hagamos sucesivamente $m=2$; $m=1$; $m=\frac{1}{2}$. El primer supuesto da

$$\frac{m}{m-1}=2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\text{\&c.}$$

y ya hemos visto (§. 234) que con efecto la serie que se halla en el segundo miembro se aproxîma tanto mas á ser 2 quantos mas términos se toman de ella; será pues convergente.

Del segundo supuesto se infiere que

$$\frac{m}{m-1}=\frac{1}{0}=1+1+1+1+1+1+\text{\&c.}$$

Este resultado $1+1+1+1+1+1$ &c. continuado, como dicen, al infinito, vendrá á ser una cantidad infinita, como lo exîge la naturaleza de la expresion $\frac{1}{0}$; pero si no haciendo caso de los residuos supusiésemos que un cierto número de términos de la serie era igual á $\frac{1}{0}$, vendríamos á dar en un manifiesto absurdo; por-

que debiendo el divisor multiplicado por el quociente reproducir el dividendo, es necesario que

$$1=(1+1+1+1+\dots\dots\dots)0;$$

y como el segundo miembro de esta equacion se reduce á *cero*, vendríamos á deducir que $1=0$.

El tercer supuesto nos conduce á conseqüencias no menos absurdas siempre que despreciemos los residuos, y miremos á la serie que resulta por quociente como una expresion exâcta del valor de la fraccion de donde se deriva. En efecto, haciendo $m=\frac{1}{2}$, hallarémos:

$$\frac{m}{m-1}=-1=1+2+4+8+16+\&c.;$$

lo qual es evidentemente falso.

Estas contradicciones desaparecerán luego que observemos que en el segundo caso los residuos

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}\ \&c.$$

son todos iguales á 1; y pues que jamas disminuyen, no se les debe despreciar por mas que se continúe la division; por manera que al producto del divisor por el quociente parcial que tomemos, deberémos añadir el residuo 1, y así tendrémos la equacion exâcta

$$1=(1+1+1+1+1+\dots\dots\dots)0+1.$$

En el tercer caso los residuos

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}\ \&c.$$

forman la progresion creciente 1, 2, 4, 8, 16 &c.; y de consiguiente son menos despreciables que en el caso anterior; por manera que solo añadiendo á cada quociente parcial el residuo que le corresponda, se podrán obtener las siguientes expresiones equivalentes á $\frac{m}{m-1}$;

$$1+\frac{1}{m-1}$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m-1)}$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2(m-1)}$$

&c.;

las quales son todas iguales á -1 quando $m=\frac{1}{2}$.

Si hacemos $m=-n$ se convertirá la fraccion $\frac{m}{m-1}$ en $\frac{n}{n+1}$; y la serie que representa al quociente de la division que en aquella expresion está indicada, se convertirá en

$$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\text{\&c.};$$

y haciendo $n=1$, tendrémos:

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\text{\&c.}$$

Si despreciando los residuos tomáremos un número par de términos de la última serie, la última equacion vendrá á ser $\frac{1}{2}=0$, y si fuere impar el número de términos de la serie, la equacion será $\frac{1}{2}=1$; y de consiguiente en todos casos es falsa la equacion supuesta; en unos por defecto, y en otros por exceso. Esto nos hace ver que, sea qual fuere el número que tomemos de esta serie, jamas deberémos despreciar el residuo.

Si en la serie precedente suponemos $n=2$, tendrémos $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-$ &c.; en cuya expresion se ve que las sumas parciales 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ &c. son alternativamente mayores y menores que el verda-

dero valor de $\frac{n}{n+1}$, que en este caso es $\frac{2}{3}$; pero al mismo tiempo se ve que aquellas sumas se van aproxîmando mas y mas á $\frac{2}{3}$; de consiguiente es *convergente* la serie propuesta, y el residuo de la division será tanto mas despreciable quantos mas términos tomemos del quociente.

Aunque las series cuyos términos van aumentando se alejan cada vez mas del verdadero valor de la expresion de donde dimanan, y por esta razon se llaman divergentes; consideradas sin embargo como unas meras transformaciones de estas expresiones, pueden sernos muy útiles para darnos á conocer todas las propiedades que no tengan conexìon con la suma de tales cantidades.

237 Si continuásemos qualquiera division algebráica, en la qual el dividendo no sea multiplo del divisor, como lo hemos hecho (§. 235) en la division de m por $m-1$, resultaria siempre expresado el quociente por una serie interminable de *monomios*. Las extracciones de las raices incomensurables ó de potencias imperfectas, continuadas del mismo modo conducirán tambien á series interminables ó infinitas; pero todas estas series se obtendrán con mas facilidad por medio de la fórmula del *binomio*, como lo manifestarémos en el *Complemento*, donde tratarémos de las series mas conocidas.

De las cantidades exponenciales y de los logaritmos.

238 En ninguna de las qüestiones resueltas hasta aquí ha sido exponente la incógnita, como lo seria si

nos propusiésemos determinar el número de los términos de una progresion por quocientes, cuyo primer término, el último y la razon ó quociente comun estuviesen dados. Con efecto, para resolver esta qüestion tendríamos (§. 231) la equacion $l=aq^{n-1}$, en la qual seria n la incógnita; y haciendo por abreviar $n-1=x$, resultaria $l=aq^{x}$. Los métodos directos expuestos anteriormente no son suficientes para resolver esta equacion; ni los signos que hasta ahora hemos adoptado lo son para indicar la serie de operaciones que se deben executar con las cantidades conocidas, para que resulte el valor de una incógnita que sea exponente. Para poner todo esto mas en claro hagamos notar, segun lo ha executado Euler, la conexîon que tienen entre sí las diferentes operaciones del Algebra, y cómo de cada una de ellas se origina una nueva especie de cantidades.

239 Si representamos por a y b dos cantidades qualesquiera que nos propongamos sumar, podrémos designar por c el resultado de la operacion, y tendrémos la equacion siguiente $a+b=c$; y si de esta equacion, que nos da á conocer la relacion de las cantidades que entran en ella, quisiéremos deducir el valor de a ó el de b, hallarémos $a=c-b$; $b=c-a$; y he aquí la sustraccion originada de la adicion, y en caso que el minuendo sea menor que el sustraendo, y de consiguiente no pueda efectuarse la sustraccion en el órden en que está indicada, viene á ser negativo el resultado. La repetida adicion de una misma cantidad da orígen á la multiplicacion; y si llamamos a al multiplicador, b al multiplicando y c al producto, tendrémos $ab=c$, de donde se deduce $a=\frac{c}{b}$; $b=\frac{c}{a}$; y de aquí proceden la divi-

sion y las fracciones, que son conseqüencia de ella en todos los casos en que no es posible efectuarla exâctamente y sin residuo final. La repetida multiplicacion de una cantidad por sí misma produce las potencias de esta cantidad, por manera que designando por b el número de veces que a es factor en la potencia c que se considere, tendrémos $a^b = c$. Esta equacion se diferencia esencialmente de las anteriores en que las cantidades a y b no entran ambas en ella de un mismo modo; y de aquí procede que la operacion, cuyo resultado nos da á conocer el valor de la una, no es suficiente para determinar el de la otra. Si estando conocidas c y b queremos hallar el valor de a, nos basta efectuar una simple extraccion de raiz; y esta operacion da orígen á una nueva especie de cantidades, que son las irracionales; pero si conociendo a y c nos propusiéremos hallar el valor de b, tendrémos que recurrir á métodos particulares, que darémos á conocer despues de haber manifestado las principales propiedades de la equacion $a^b = c$.

240 Bien se dexa conocer que si conservando á la letra a un cierto valor invariable, que supondrémos mayor que la unidad, hacemos variar, segun queramos, el de b, podrémos obtener para c todos los números imaginables. Con efecto, haciendo $b = 0$, resulta $c = 1$; y despues á proporcion que vaya creciendo b irán los valores de c siendo cada vez mayores que la unidad, y podrán llegar á ser tan grandes como se quiera. Si fuese negativo el valor de b, la equacion que hemos supuesto $a^b = c$ se convertiria en $a^{-b} = c$, ó en $\frac{1}{a^b} = c$; y los valores de c irian siendo tanto menores quanto mayor fuese el valor negativo de b; por manera que podrian

llegar á ser tan pequeños como se quisiera. Con solo pues variar el exponente b de una misma cantidad a se pueden deducir de la misma equacion supuesta, para c todos los números positivos posibles enteros ó fraccionarios en el caso que a sea mayor que la unidad. Lo mismo sucederia aun quando fuese $a < 1$, sin otra diferencia que la de que las variaciones de c procederian en sentido contrario al del caso precedente: es decir, que los valores de c aumentarian quando los de b fuesen negativos; y disminuirian aquellos quando estos fuesen positivos. Pero si supusiéramos $a = 1$, resultaria siempre $c = 1$, qualquiera que fuese el valor de b, y por esta razon mirarémos la a en todo este tratado como que representa una cantidad mayor ó menor que la unidad.

Para indicar que mientras conservamos á la cantidad designada por a un mismo valor, consideramos á las cantidades b y c como susceptibles de quantos valores puedan imaginarse, ó segun se dice, como cantidades *variables*, representarémos á estas últimas con las letras x é y, con lo qual la equacion primitiva se transformará en estotra $a^x = y$. Ya se dexa entender que en esta equacion á cada valor particular de x corresponde otro valor particular de y, y al contrario; por manera que en estando determinado el valor de una de estas cantidades, no puede ya ser arbitrario el de la otra.

241 Esta mutua dependencia ó relacion entre las cantidades x é y, es decir, entre qualquier potencia y de una cantidad a, y el exponente x de su grado merece mucha atencion, porque puede sernos muy útil, no solo para los cálculos algebráicos, sino tambien para los aritméticos. En efecto, si consideramos otra potencia y' de la misma cantidad a, y designamos por x' el exponente

que corresponde á esta nueva potencia, tendrémos $a^{x'}=y'$; y por consiguiente si multiplicamos esta última equacion por la anterior, tendrémos $yy'=a^x \times a^{x'}=a^{x+x'}$. Si dividimos una por otra, resultará

$$\frac{y'}{y}=\frac{a^{x'}}{a^x}=a^{x'-x}.$$

Ultimamente, si en qualquiera de las dos equaciones supuestas elevamos ambos miembros á una potencia indicada por el exponente m, ó extraemos de ellos la raiz cuyo exponente sea n, tendrémos estos otros resultados:

$$y^m=(a^x)^m=a^{mx};$$
$$y^{\frac{1}{n}}=(a^x)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{x}{n}}.$$

Los dos primeros resultados nos hacen ver que en conociendo los exponentes x y x' respectivos á las potencias y é y', tendrémos en la suma de ellos el exponente que corresponde al producto yy' de las dos potencias; y en la diferencia de los exponentes x y x' tendrémos el que corresponde al quociente $\frac{y'}{y}$ de las dos potencias. Las dos últimas equaciones manifiestan que el exponente respectivo á una potencia qualquiera de y se obtiene por medio de una simple multiplicacion; y por medio de una simple division el que corresponde á una raiz qualquiera de y. De aquí es fácil inferir que si tuviésemos una tabla, en la qual se hallasen al lado de cada uno de los números y los valores correspondientes de x, de manera que dado y se pudiese tener x, y recíprocamente, en este caso *quedaria reducida á una simple adicion la multiplicacion de dos números qualesquiera*; porque en lugar de efectuar la operacion con

estos números que hemos representado por y,y', sumaríamos los valores de x,x' que les correspondiesen; y buscando despues en la misma tabla el número respectivo á esta suma, aquel número deberia ser el producto que buscábamos. Asimismo si tratásemos de efectuar una division, buscaríamos en la tabla los valores de x,x', que correspondiesen al dividendo y al divisor; restaríamos del correspondiente al dividendo el respectivo al divisor, y el número que correspondiese á la diferencia de los valores de x,x', seria el quociente que nos proponíamos hallar. De este modo *la division se executaria por medio de la sustraccion.*

Estos dos exemplos pueden ser suficientes para dar á conocer la utilidad que debe resultar de tener ya formadas semejantes tablas. Así es que se ha adoptado generalmente el uso de ellas desde que *Neper* las inventó. En ellas á cada uno de los tres números que entran en la equacion fundamental $a^x = y$ se le ha atribuido cierta denominacion. Los diferentes valores de y conservan el nombre general de *números*. Los diferentes valores del exponente x estan designados con la denominacion de *logaritmos* de los números á que corresponden. El número invariable representado por a se llama la *base de la tabla ó del sistema de logaritmos*. Así que *los logaritmos son los exponentes de las potencias á que se debe elevar un número invariable, para que se vaya sucesivamente igualando á todos los números imaginables.*

En lo sucesivo representarémos el logaritmo de y por $\mathrm{l}y$, de modo que será $x = \mathrm{l}y$; y por ser $y = a^x$ vendrá á ser $y = a^{\mathrm{l}y}$.

242 Las propiedades que hemos demostrado de los logaritmos son independientes del valor particular

del número a ó de la base; y de ahí es que se pueden formar una infinidad de tablas ó sistemas diferentes, eligiendo para base de cada tabla ó sistema el número que queramos ó mas nos acomode, con tal que no sea la unidad. Tomando, por exemplo, $a = 10$, la equacion fundamental de este sistema particular será $y = (10)^{ly}$, y de ella se deducirá inmediatamente que los números 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000; &c., que son todos potencias perfectas de la base 10, tienen por logaritmos en esta hipótesi los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. En esta serie de logaritmos se pueden ya observar las propiedades generales que hemos demostrado en el párrafo anterior. En efecto, sumando los logaritmos de 10 y de 1000, que son 1 y 3, se ve que su suma 4 corresponde á 10000, que es el producto de los números 10 y 1000.

243 En el supuesto de haber elegido á 10 por base, los logaritmos de los números intermedios entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c. no se pueden obtener sino solo por aproxîmacion. Si se tratase, por exemplo, de hallar el logaritmo que en este sistema corresponde á 2, seria necesario resolver la equacion $(10)^x = 2$. Para esto podrémos hacer uso del método que hemos dado ya á conocer (§. 221); es decir, se hallaria primeramente el número entero que mas se aproxîmase al valor de x; y por lo que á esto respecta, se ve inmediatamente que la x correspondiente al número 2 está entre 0 y 1, puesto que $(10)^0 = 1$; y $(10)^1 = 10$; harémos pues $x = \frac{1}{z}$, y tendrémos $(10)^{\frac{1}{z}} = 2$, ó $10 = 2^z$; y como para que se veri-

fique, como debe, esta última equacion, ha de estar z entre 3 y 4, supondrémos $z = 3 + \frac{1}{z'}$, y resultará:

$$10 = 2^{3 + \frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}};$$

ó $$2^{\frac{1}{z'}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4};$$

ó últimamente $$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}.$$

Para que se verifique la última equacion debe estar el valor de z' entre 3 y 4; y de consiguiente supondremos $z' = 3 + \frac{1}{z''}$, y tendrémos:

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3 + \frac{1}{z''}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}};$$

de donde sacarémos:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{128}{125}; \text{ ó } \left(\frac{128}{125}\right)^{z''} = \frac{5}{4};$$

y despues de un corto número de tanteos hallarémos que z'' está entre 9 y 10. Del mismo modo podrémos continuar quanto queramos la aproxîmacion; pero como nuestro intento en indicar este método ha sido solo manifestar la posibilidad de hallar los logaritmos de todos los números, nos limitarémos á suponer $z'' = 9$, y retrocediendo hallarémos $z' = \frac{28}{9}$; $z = \frac{93}{28}$; $x = \frac{28}{93}$. Reduciendo á decimales este valor de x, se ve que hasta la quarta cifra está conforme con el verdadero; porque da $x = 0{,}30107$; y por cálculos llevados á mayor grado de aproxîmacion se ha averiguado que aproxîmado hasta 7 decimales, resulta $x = 0{,}3010300$. Puesto que todo logaritmo debe considerarse como exponente de la

base, para interpretar este valor de x como el de un exponente, es necesario imaginarse que si se eleva el número 10 á la potencia indicada por el número 3010300; y si del resultado se extrae una raiz del grado designado por 10000000, resultará un número muy próximo á 2; esto es, que $(10)^{\frac{3010300}{10000000}} = 2$ con corta diferencia: en cuya equacion el primer miembro es algo mayor que 2; pero el número $10^{\frac{3010299}{10000000}}$ será algo menor. *

244 Multiplicando sucesivamente por 2, 3, 4 &c. el logaritmo de 2, se obtienen los de los números 4, 8, 16 &c., que son la segunda, tercera, quarta &c. potencias de 2. Añadiendo al logaritmo de 2 los logaritmos de 10, de 100, de 1000 &c. se deducen los de 20, de 200, de 2000 &c.; y generalmente en conociendo los logaritmos de los números *primos*, es muy fácil hallar los logaritmos de todos los números compuestos, pues que estos no pueden menos de ser potencias ó productos de los números *primos*. Siendo, por exemplo, el número 210 igual á $2 \times 3 \times 5 \times 7$, será

$$l210 = l.2 + l3 + l5 + l7;$$

y por ser $5 = \frac{10}{2}$, tendrémos:

$$l5 = l10 - l2.$$

245 Como los logaritmos estan por lo comun expresados en decimales, se les puede considerar como compuestos de dos partes; á saber, de las unidades enteras que se hallan situadas á la izquierda de la coma,

* Véase la nota última que se halla al fin de este tomo.

y de las cifras decimales que estan á la derecha de ella. A la primera parte del logaritmo se le ha dado el nombre de *característica*, porque en los logaritmos del sistema de que vamos hablando, que resultan de la suposicion de $a = 10$ y que se llaman *logaritmos comunes*, da esta parte á conocer quál es el órden mas elevado de unidades que se halla en el número cuyo logaritmo suponemos conocido. En efecto, hallándose entre 0 y 1 todos los logaritmos de los números comprehendidos entre 1 y 10, tienen precisamente 0 por característica; todos los de los números comprehendidos entre 10 y 10 tienen 1; todos los de los números comprehendidos entre 100 y 1000 tienen 2; y en general, la característica de un logaritmo tiene una unidad menos que cifras de enteros haya en la combinacion con que esté representado el número.

A la segunda parte de qualquier logaritmo, es decir, á la fraccion decimal que en él se halla, le suelen algunos dar el nombre de *mantisa*.

246 Tambien es muy digno de notarse que en el mismo sistema, siempre que un número sea 10 ó 100 ó 1000 &c. veces mayor ó menor que otro, sus logaritmos tienen la misma fraccion decimal, ó sea la misma *mantisa*, y solo se diferencian en las *características*.

Así es que á los

Números corresponden los	*Logaritmos*.
543600	5,7352794
54360	4,7352794
5436	3,7352794
543,6	2,7352794
54,36	1,7352794
5,436	0,7352794

porque siendo cada uno de estos números el producto del inmediato siguiente multiplicado por 10, cada logaritmo deberá ser (§. 241) la suma del siguiente y del de 10; y como este logaritmo es la unidad, su adicion no puede alterar la fraccion decimal del otro, sino solo su *característica*.

247 Con arreglo á lo expuesto (§. 240) deberán ser negativos en el mismo sistema los logaritmos de todos los quebrados propios; porque representando todo quebrado al quociente de la division del numerador por el denominador, el logaritmo de qualquier quebrado deberá hallarse (§. 241) restando del logaritmo del numerador el del denominador; y de consiguiente quando el numerador sea menor que el denominador, el logaritmo *sustraendo* será mayor que el *minuendo*; la sustraccion no podrá efectuarse en el órden que la regla prescribe, sino en el inverso; y por tanto será negativo el residuo.

Para hallar, por exemplo, el logaritmo de la fraccion $\frac{1}{2}$, deberémos restar de *cero*, que es el logaritmo de 1, el logaritmo 0,3010300 del denominador; y así resultará

$$l\tfrac{1}{2} = -0{,}3010300.$$

Restando de *cero* el número mixto 1,3010300, que es el logaritmo de 20, tendrémos:

$$l\frac{1}{20} = -1{,}3010300.$$

Siendo 0,3010300 el logaritmo de 2; y 0,4771213 el de 3, será $l\frac{2}{3} = 0{,}3010300 - 0{,}4771213 = -0{,}1760913$.

Si para que sean posibles estas sustracciones, que

en realidad no lo son, añadiésemos al logaritmo minuendo las unidades que sean necesarias ó que nos parezcan convenientes, el residuo vendrá á ser positivo; pero como estas adiciones equivalen á multiplicar por 10 ó por 100 ó por 1000 &c. el quebrado propuesto, el residuo será el logaritmo de un número 10 ó 100 ó 1000 &c. veces mayor, ó lo que viene á ser lo mismo, será el de tantas unidades como *décimas* ó *centésimas* ó *milésimas* &c. equivalgan al mismo quebrado.

En efecto, si tratando de hallar el logaritmo de $\frac{1}{2}$ añadimos una unidad al logaritmo del numerador para que pueda restarse el logaritmo del denominador, el residuo positivo 0,6989700 será el logaritmo no de $\frac{1}{2}$ sino de 5 unidades, que es una cantidad 10 veces mayor que $\frac{1}{2}$, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como décimas equivalen á $\frac{1}{2}$.

Si tratando de hallar el logaritmo de $\frac{1}{20}$ añadimos 2 unidades al logaritmo del numerador para que pueda efectuarse la sustraccion de 1,3010300, el residuo positivo 0,6989700 será el logaritmo de una cantidad 100 veces mayor que el quebrado propuesto, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como centésimas equivalen á $\frac{1}{20}$.

Si proponiéndonos hallar el logaritmo de $\frac{2}{3}$ nos pareciere conveniente añadir al logaritmo del numerador 4 unidades, es decir, el logaritmo de 10000; en habiendo sustraido de esta suma el logaritmo del denominador, el residuo positivo 3,8239087 será el lo-

garitmo de un número 10000 veces mayor que $\frac{2}{3}$, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como *diez milésimas* equivalen á $\frac{2}{3}$.

Aunque los logaritmos que de este modo hallamos no sean los verdaderos que buscábamos de los quebrados, son sin embargo los que mas se usan á fin de evitar los logaritmos negativos; y para dar mas uniformidad á los cálculos se añaden por lo comun 10 unidades al logaritmo del numerador. Por manera que tratando de hallar el logaritmo de $\frac{2}{3}$ restarémos de 10,3010300 el logaritmo 0,4771213 del denominador, y el residuo 9,8239087, que es el logaritmo de un número *diez mil millones* de veces mayor que $\frac{2}{3}$, será el que habrémos de emplear en lugar del verdadero logaritmo del quebrado propuesto.

Es verdad que de este modo empleamos un logaritmo con 10 unidades demas; pero será muy fácil suprimirlas, luego que agregándose este logaritmo á algun otro, haya en la suma unidades bastantes para efectuar aquella supresion indispensable para rectificar el resultado. En efecto, si hubiéramos de hallar con el auxîlio de los logaritmos el producto de $\frac{2}{3}$ multiplicados por 18, sumaríamos el logaritmo 1,2552725 del multiplicador con el logaritmo 9,8239087; y suprimiendo de la suma las 10 unidades que este segundo lleva de mas, será 1,0791812 el verdadero logaritmo del producto que buscábamos.

248 Si, por la inversa, se nos propusiere un logaritmo negativo, y se nos preguntare qué número le corresponde, ya podemos tener certeza de que deberá ser un quebrado propio; y suponiendo, como siempre nos es permitido, que su numerador sea la unidad, su denominador habrá de ser el número que corresponderia al logaritmo propuesto si fuese positivo. En efecto, $-0,1760913$, que como ya sabemos es el logaritmo de $\frac{2}{3}$, lo es por consiguiente de $\frac{1}{\frac{3}{2}}$; y el logaritmo de $\frac{3}{2}$ es justamente $0,1760913$.

No es muy cómodo para la práctica este método de hallar el número correspondiente á un logaritmo negativo; porque despues de haber determinado el número que corresponda al mismo logaritmo positivo, tenemos ademas que dividir por este número la unidad. Por esta razon lo que mas comunmente se practica es restar de una, dos ó tres &c. unidades, es decir, del logaritmo de uno de los números 10, 100, 1000 &c. el logaritmo propuesto, prescindiendo de su signo; se busca despues el número que corresponde al residuo; y quantas unidades tenga este número, otras tantas décimas ó centésimas ó milésimas &c. equivaldrán al quebrado que buscábamos, segun que hayamos elegido para minuendo el logaritmo de 10 ó el de 100 ó el de 1000 &c.

Si nos propusiéramos, por exemplo, hallar el quebrado correspondiente al logaritmo $-0,3010300$, restaríamos de una unidad ó de $1,0000000$, que es el logaritmo de 10, el logaritmo $0,3010300$, que es el del denominador de la fraccion que buscamos. El residuo $0,6989700$ será (§. 241) el logaritmo de

un quociente ó quebrado diez veces mayor, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como décimas equivalen al quebrado que deseamos conocer. Viendo pues en las tablas que el logaritmo 0,6989700 corresponde á 5 unidades; inferirémos que el logaritmo propuesto $-$0,3010300 corresponde á 0,5.

Si nos propusiéramos hallar el quebrado correspondiente al logaritmo $-$0,0280287, y restásemos de 4 unidades ó de 4,0000000, que es el logaritmo de 10000, el logaritmo positivo 0,0280287, el residuo 3,9719713 seria el logaritmo de un quociente ó quebrado 10000 veces mayor que el que buscamos, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como *diez milésimas* equivalen á este último quebrado. En viendo pues en las tablas que al logaritmo 3,9719713 corresponde el número 9375, inferirémos que el logaritmo propuesto $-$0,0270287 corresponde á la fraccion 0,9375.

Por lo comun se elige para minuendo á 10 unidades, ó lo que viene á ser lo mismo, al logaritmo de 10000000000; y de consiguiente el residuo vendrá á ser el logaritmo de un quociente ó quebrado 10000000000 de veces mayor que el que buscamos. Si, por exemplo, nos propusiéramos hallar el quebrado que corresponde al logaritmo $-$0,1072100, restaríamos de 10 unidades el logaritmo positivo 0,1072100; y el residuo 9,8927900, que en las tablas corresponde al número 7812500000 será el logaritmo de un número 10000000000 veces mayor que la fraccion que buscamos. Será pues esta 0,7812500000, ó lo que es lo mismo 0,78125.

Si de la sustraccion hubiera resultado 8,8927900,

el número correspondiente seria 781250000, y la fraccion seria 0,078125. Si hubiese resultado 7,8927900, la fraccion seria 0,0078125; y en general siempre que nos propongamos determinar la fraccion correspondiente á un logaritmo que tenga 10 unidades demas, la misma combinacion de cifras con que esté representado el número entero que en las tablas corresponde al logaritmo propuesto, representará la fraccion decimal que se busca; pero con la advertencia de que si la característica fuere 9 no habrá *cero* alguno á la derecha de la coma; si la característica fuere 8, habrá un cero á la derecha de la coma; si 7, dos; y en general habrá á la derecha de la coma tantos ceros como unidades falten á la característica para llegar á *nueve*.

249 Es fácil ver que si tratando de quitar 4 unidades, por exemplo, de otro número qualquiera, que representáremos por N; en lugar de efectuar la sustraccion añadimos á N las 6 unidades que faltan al sustraendo para llegar á 10, la suma tendrá 10 unidades mas que el residuo que buscábamos; y de consiguiente para obtener este residuo habrá que quitar de aquella suma 10 unidades. En efecto, $N+6=N+10-4$; y es claro que en suprimiendo 10 de esta última expresion, resulta $N-4$; es decir, el verdadero residuo que nos proponíamos hallar.

A conseqüencia de esta observacion se ha ocurrido convertir en adiciones todas las sustracciones que tengamos que efectuar con los logaritmos, sustituyendo en vez de cada sustraendo la cantidad que á este falte para llegar á 10 unidades, y suprimiendo de la suma estas 10 unidades.

Lo que falta á qualquier número para llegar á 10

ó 100 ó 1000 &c. unidades; y en general lo que falta á qualquier número para componer una unidad del órden inmediato superior á las mas elevadas que en él haya, se llama su *complemento aritmético.* Así que, el el complemento aritmético de 7 es 3; el de 84 es 16; el de 687 es 313, y así de los demas. Se puede fácilmente hallar el *complemento aritmético* de un número representado por una combinacion de muchas cifras, restando de 9 el valor de cada una, á excepcion de la primera de la derecha, cuyo valor se restará de 10.

El complemento aritmético del logaritmo de un número toma el nombre de *complemento logarítmico* del mismo número; y haciendo uso de esta expresion, dirémos que en vez de restar el logaritmo de un número podrémos sumar el complemento logarítmico de este mismo número, con tal que de la suma suprimamos 10 unidades. En caso que se hayan de restar muchos logaritmos, se sumarán sus respectivos complementos, y de la suma se suprimirán tantas decenas de unidades como complementos se hayan sumado. Algunas veces no es posible efectuar la supresion de todas estas decenas; y entonces el resultado, que tendrá 10 unidades demas, será el complemento logarítmico de un quebrado propio, y corresponderá en las tablas á un número entero representado por la misma combinacion de cifras que la fraccion decimal equivalente al quebrado (§. 248).

La exposicion que acabamos de hacer del sistema de logaritmos cuya base $a=10$, contiene los principios generales necesarios para la inteligencia de las tablas; y como á casi todas ellas las precede una instruccion relativa á su particular disposicion y al modo de

usarlas, creemos superfluo detenernos mas sobre este asunto. *

250 Quando despues de haber elegido una base particular hayamos determinado el logaritmo de un número, nos será sumamente fácil hallar el logaritmo que corresponde al mismo número en otro sistema qualquiera; porque si representamos por a, A las bases de los dos sistemas, y por x, X los logaritmos que en ellos corresponden al número y, tendrémos estas dos equaciones: $a^x = y$; $A^X = y$;

de las quales se deduce estotra $a^x = A^X$; y tomando en un mismo sistema los logaritmos de los dos miembros de la última, tendrémos estotra:

$$\mathrm{l}a^x = \mathrm{l}A^X,$$

ó su equivalente

$$x\,\mathrm{l}a = X\,\mathrm{l}A.$$

Ahora bien, si suponemos tomados en el sistema de la base a los dos logaritmos que entran en la última equacion, será $\mathrm{l}a = 1$; y de consiguiente toda la equacion se transformará en la siguiente:

$$x = X\,\mathrm{l}A;$$

de la qual se deduce

$$X = \frac{x}{\mathrm{l}A}.$$

Si así como hemos anteriormente (§. 241) puesto $\mathrm{l}y$ en lugar de x, ponemos ahora $\mathrm{L}y$ en lugar de X, la última fórmula podrá escribirse de este modo:

$$\mathrm{L}y = \frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{l}A};$$

la qual nos da á entender que *en dividiendo el logarit-*

* Las tablas de Callet (edicion estereotipa) y las de Bordá son bastante extensas y cómodas.

mo que en un sistema corresponde á un número qualquiera, por el logaritmo que á una nueva base corresponde en el mismo sistema, el quociente es el logaritmo que corresponde al mismo número en el sistema de la nueva base.

De la última fórmula se deduce tambien que $\frac{ly}{Ly} = lA$; lo qual nos hace ver que, sea qual fuere el número representado por y, exîste entre los logaritmos que le corresponden en dos sistemas diferentes una razon invariable representada por lA.

251 En quantos sistemas son imaginables el logaritmo de la *unidad* es necesariamente *cero*; porque, sea qual fuere el valor particular de a, no puede menos de verificarse la equacion $a^0 = 1$. Los logaritmos de los números mayores que 1 van creciendo sin límite, ó como se dice, al *infinito*, así como los mismos números; y por lo que respecta á los números menores que la unidad ó fraccionarios, la equacion $y = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$ nos hace ver que quanto menor sea el número y, tanto mayor debe ser el valor negativo de x; pero como por grande que sea este valor de x, jamas se podrá verificar que a^{-x} ó $\frac{1}{a^x}$ sea *cero*, bien que se pueda aproxîmar á cero quanto queramos; es consiguiente que no pueda asignarse ningun logaritmo negativo, por grande que lo supongamos, que pueda ser logaritmo de *cero*; y en este sentido debe entenderse la expresion *el logaritmo de cero es el infinito negativo*, de la qual se hace uso en muchas tablas.

252 Pasemos ya á manifestar con algunos exem-

plos la aplicacion que puede hacerse de los logaritmos al cálculo numérico de las fórmulas algebráicas. De lo expuesto (§. 241) se sigue que

$$l(abcd\ \&c.) = la + lb + lc + ld + \&c.$$

$$l\left(\frac{abc\ \&c.}{def\ \&c.}\right) = la + lb + lc + \&c. - ld - le - lf - \&c.$$

y si representamos por d', e', f' &c. los complementos logarítmicos de los factores del denominador, será

$$l\left(\frac{abc}{def}\right) = la + lb + lc + d' + e' + f' - 3\times 10;$$

porque suponemos tomados tres complementos. Siendo $l(a^m) = m\,la$; $l\,a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,la$; $l\,a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\,la$; si se nos propusiese la fórmula $\frac{a^2\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt[5]{d^3ef}}$ para calcular con el auxîlio de los logaritmos el resultado final de todas las operaciones que estan en ella indicadas, diríamos:

$$l(a^2\sqrt{b^2-c^2}) = l(a^2\sqrt{(b+c)(b-c)}) =$$
$$l[a^2(b+c)^{\frac{1}{2}}(b-c)^{\frac{1}{2}}]$$
$$= 2\,la + \tfrac{1}{2}\,l(b+c) + \tfrac{1}{2}\,l(b-c);$$

$$l(c\sqrt[5]{d^3ef}) = l(cd^{\frac{3}{5}}e^{\frac{1}{5}}f^{\frac{1}{5}}) = lc + \tfrac{3}{5}\,ld + \tfrac{1}{5}\,le + \tfrac{1}{5}\,lf;$$

y de consiguiente

$$l\left(\frac{a^2\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt[5]{d^3ef}}\right) =$$
$$2\,la + \tfrac{1}{2}\,l(b+c) + \tfrac{1}{2}\,l(b-c) - lc - \tfrac{3}{5}\,ld - \tfrac{1}{5}\,le - \tfrac{1}{5}\,lf$$
$$= 2\,la + \tfrac{1}{2}\,l(b+c) + \tfrac{1}{2}\,l(b-c) + c' + d' + e' + f' - 4\times 10.$$

representando por c', d', e', f' los complementos de los quatro sustraendos. En habiendo hallado el logaritmo

de la fórmula propuesta, las tablas nos darán á conocer el número que le corresponde; y ese será el valor del resultado de todas las operaciones que en la fórmula estaban indicadas.

253 A conseqüencia de los mismos principios se determina fácilmente por medio de los logaritmos el quarto término de qualquiera proporcion en estando conocidos los otros tres; porque si de la proporcion $a:b::c:d$ se deduce $d=\frac{bc}{a}$, se deducirá tambien (§. 241)

$$ld=lb+lc-la=lb+lc+a'-10;$$

es decir, que *el logaritmo del quarto término desconocido es igual á la suma de los logaritmos de los medios menos el logaritmo del extremo conocido;* ó lo que es lo mismo, *á la suma de los logaritmos de los medios y del complemento logarítmico del extremo conocido, menos 10 unidades.*

254 Puesto que toda proporcion $a:b::c:d$ envuelve esencialmente esta equacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; tomando los logaritmos de estos dos miembros, tendrémos $la-lb=lc-ld$, lo qual nos hace ver que los quatro logaritmos de los términos de toda proporcion $la.lb:lc.ld$ forman una combinacion de términos equidiferentes (§. 223).

La serie de equaciones

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}=\&c. \text{ (§. 231)}$$

conduce igualmente á estotras:

$$lb-la=lc-lb=ld-lc=le-ld=\&c.;$$

y de aquí es fácil inferir que á toda progresion por quocientes $\div\!\div\ a:b:c:d:e:$ &c. corresponde la progre-

sion por diferencias $\div$ la. lb. lc. ld. le &c.; y que por consiguiente los logaritmos de los números en progresion por quocientes forman una progresion por diferencias.

255 Si tuviésemos la equacion $b^z=c$, en la qual b y c representan cantidades conocidas, determinaríamos el valor de la incógnita z por medio de los logaritmos; porque siendo $\mathrm{l}b^z=z\mathrm{l}b$, tendrémos: $z\mathrm{l}b=\mathrm{l}c$, y por consiguiente $z=\frac{\mathrm{l}c}{\mathrm{l}b}$. Del mismo medio nos valdríamos para determinar el valor de z en la equacion $b^{c^z}=d$; pues haciendo primeramente $c^z=u$, resultará:

$$b^u=d;\ u\,\mathrm{l}b=\mathrm{l}d;\ u=\frac{\mathrm{l}d}{\mathrm{l}b};\ \text{ó}\ c^z=\frac{\mathrm{l}d}{\mathrm{l}b};$$

y tomando nuevamente los logaritmos de los dos miembros de esta última equacion, tendrémos:

$$z\,\mathrm{l}c=\mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{l}d}{\mathrm{l}b}\right)=\mathrm{l}\,\mathrm{l}d-\mathrm{l}\,\mathrm{l}b;\ \text{y}\ z=\frac{\mathrm{l}\mathrm{l}d-\mathrm{l}\mathrm{l}b}{\mathrm{l}c}.$$

En esta última expresion $\mathrm{l}\,\mathrm{l}b$ indica el logaritmo del logaritmo de b, y se obtiene considerando al logaritmo de b como un número. Las expresiones b^z y b^{c^z}, y todas las que se parecen á estas, se llaman *cantidades exponenciales*.

Qüestiones relativas á los intereses ó réditos del dinero.

Varias especulaciones que en el comercio ocurren relativas á los intereses ó réditos del dinero vienen á ser uno de los objetos importantes á que se puede aplicar la teoría de las progresiones. Para inteligencia de lo que nos proponemos decir acerca de esto, es necesario saber que las utilidades que saca de una cantidad de dinero el que la emplea en negociaciones mercantiles, en manufacturas ó en qualquiera otra especie de labores productivas, son tanto mayores quanto mas se multiplican estas negociaciones ó labores. De aquí es

que el que toma prestada una cantidad de dinero para emplearla, debe no solo restituirla al cabo de cierto tiempo, sino tambien agregar á ella alguna retribucion ó premio para indemnizar al que se la prestó, por razon de las ventajas que este pudiera haber sacado empleándola por sí mismo. Tal es la idea que debemos formarnos de los intereses ó réditos del dinero. Para determinar los que corresponden á cada una de las cantidades que se presten, se refieren todas ellas como á unidad á 100 monedas de la misma especie que la suma prestada; en la suposicion de que en el contrato se debe haber estipulado quánto deben ganar ó redituar estas 100 monedas al cabo de algun tiempo dado, por exemplo, de un año. No es este lugar oportuno para exponer todas las circunstancias que en cada género de especulaciones pueden contribuir á que suba ó baxe el interes del dinero: este es asunto para tratado en unos elementos de aritmética política y comercial despues del cálculo de las probabilidades. Nuestro objeto por ahora se reduce tan solo á manifestar la importancia de algunos problemas respectivos á las progresiones por quocientes.

Supondrémos en general que se haya pactado que al cabo de un año se ha de pagar por cada una de las monedas de la suma prestada un premio, rédito ó interes designado por r, el qual deberá ser una fraccion. A conseqüencia de esta suposicion los réditos devengados en el mismo tiempo por 100 monedas, será $100r$; y los de una cantidad qualquiera a estarán representados por ar; y si designamos estos réditos por α, tendrémos $\alpha = ar$.

Por medio de esta sencillísima fórmula se hallarán fácilmente los réditos anuales de qualquiera cantidad, en sabiendo los que devengan cada 100 monedas ó qualquiera otra suma en un tiempo conocido. Esta viene á ser la qüestion fundamental del cálculo del interes simple (*Aritm.* §. 165).

257 Pero si el acreedor en lugar de percibir los réditos devengados en el primer año, los dexa juntamente con el capital primitivo en poder del deudor para que tambien produzcan réditos en el año siguiente, el capital respectivo á este segundo año vendrá á ser el primitivo a mas los réditos ar que en el primero devengó. Por manera que si representamos por a' el capital respectivo al segundo

año, tendrémos: $a' = a + ar = a(1 + r)$.

Siendo $a'r$ los réditos devengados por la cantidad a' en un año, será $ar(1 + r)$ los de la suma $a(1 + r)$ en el segundo año. Supongamos que el acreedor los dexe tambien en poder del deudor; y así como la suma del capital primitivo a y de los intereses que devengó en el primer año vino á ser capital para el segundo, este capital a' mas sus réditos $a'r$ vendrán á ser capital para el tercer año. De modo que si designamos por a'' este último capital, será

$$a'' = a' + a'r = a'(1 + r) = a(1 + r)^2.$$

Los réditos que en un año devengue el capital a'' estarán bien representados por $a''r$; y suponiendo que tambien queden en poder del deudor, tendrémos que al fin del tercer año, y para que sirva de capital para el quarto, será

$$a''' = a'' + a''r = a''(1 + r) = a(1 + r)^3.$$

Se ve con facilidad que al cabo del quarto año será

$$a^{IV} = a''' + a'''r = a'''(1 + r) = a(1 + r)^4;$$

y así sucesivamente. Por consiguiente el capital primitivo y las cantidades que el deudor satisfaria al cabo del primer año, ó del segundo ó del tercero &c. si qualquiera de estos fuese el plazo final de la obligacion, forman esta progresion por quocientes:

$$\dot{\div}\, a : a(1 + r) : a(1 + r)^2 : a(1 + r)^3 : a(1 + r)^4 : \&c.$$

en la qual el quociente es $1 + r$, y el término general $a(1+r)^n = A$, representando por n el número de los años que hayan pasado desde que se hizo el empréstito.

Si fuese 5 por 100 el *tanto anual* estipulado, será $100r = 5$; ó $r = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; $1 + r = \frac{21}{20}$; y en este caso por una cantidad a prestada á interes compuesto y por espacio de 25 años se habria de pagar $a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$. El valor de la 25.ª potencia de $\frac{21}{20}$ se determina con suma prontitud por medio de los logaritmos; pues segun hemos demostrado (§. 241)

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 25\, l\frac{21}{20} = 25(l21 - l20) = 0{,}5297322;$$

y como este logaritmo corresponde próxîmamente á 3,386, será

$\left(\frac{21}{20}\right)^{25}=3{,}386$; y de consiguiente $A=3{,}386a$. Por manera que 1000 pesos prestados con estas condiciones valdrian 3386 pesos al cabo de los 25 años, comprehendiendo en la suma los intereses no solo del capital sino tambien de los intereses.

Si fuesen 100 los años de la duracion del empréstito, tendriamos $A=a\left(\frac{21}{20}\right)^{100}=131a$ con muy corta diferencia; y así 1000 pesos producirian al cabo de este tiempo una cantidad de cerca de 131000 pesos. Estos exemplos manifiestan con quánta velocidad se aumentan los fondos con la acumulacion de los intereses compuestos.

258 Como en la equacion fundamental $A=a(1+r)^n$ del interes compuesto entran quatro cantidades, se puede hacer uso de ella para resolver quatro qüestiones. La primera es: *conociendo las cantidades* a, r *y* n *hallar* A; á esta se refieren los exemplos que hemos propuesto en el párrafo anterior, en los quales se suponian conocidos el capital primitivo, el tanto por ciento y el número de años, y nos proponíamos determinar á quánto ascendia al cabo de este tiempo la suma de capital y réditos.

La segunda: *conociendo* A, a *y* n *hallar* r, es decir, el tanto por ciento que en el contrato se estipuló. Para resolver esta qüestion deducirémos de la equacion fundamental

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

La tercera: *conociendo* A, r *y* n *hallar* a; para lo qual deducirémos de la misma equacion la fórmula

$$a=\frac{A}{(1+r)^n};$$

que nos da á conocer el capital que es necesario emplear para tener derecho á percibir despues de un número n de años una suma A.

La quarta: *conocidas* A, a *y* r *hallar* n; no se puede resolver sino con el auxîlio de los logaritmos (§§. 238 y 252). En efecto tomando el de cada miembro de la equacion fundamental, tendrémos:

$$lA=la+nl(1+r);$$

de donde se deduce:

$$n = \frac{lA - la}{l(1+r)}.$$

Por esta última fórmula se averigua quántos años deben pasar para que el capital a, juntamente con los réditos, llegue á componer una cantidad A.

Para dar un exemplo de esta última qüestion supongamos que se quiera saber quánto tiempo será necesario para que se doble el capital primitivo, siendo como antes 5 el tanto por ciento. En este supuesto será $A = 2a$, y $lA = la + l2$; sustituyendo pues estos valores particulares en la fórmula general $n = \frac{lA - la}{l(1+r)}$, tendrémos:

$$n = \frac{l2}{l\frac{21}{20}} = \frac{l2}{l21 - l20} = \frac{0,3010300}{0,0211893} = 14,21$$

con corta diferencia.

259 La qüestion siguiente es una de las mas complicadas que se suelen proponer sobre este asunto. Supongamos que el acreedor, lejos de percibir por espacio de algunos años cantidad alguna, entregue en cada año al deudor una nueva cantidad, y que habiendo executado estas nuevas agregaciones durante un número $n-1$ de años, se nos pregunta *quál es al cabo de* n *años el importe total de capitales y réditos á interes compuesto.* Sean a, b, c, d...... k el capital primitivo y las cantidades agregadas al fin del primero, segundo, tercero, quarto &c. año; y como la cantidad a permanece en poder del deudor por espacio de un número n de años, ascenderá al cabo de este tiempo á $a(1+r)^n$. La cantidad b que está en poder del mismo deudor $n-1$ años, se convertirá al cabo de ellos en $b(1+r)^{n-1}$. La cantidad c, que solo estará durante $n-2$ años, se convertirá en $c(1+r)^{n-2}$, y así sucesivamente; en fin la última cantidad k, que solo ha estado en poder del deudor un año, no dará mas que $k(1+r)$. Tendrémos pues:

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} \ldots\ldots + k(1+r);$$

y calculando separadamente cada término del segundo miembro de esta equacion, tendrémos el valor de A.

Este cálculo se simplifica mucho quando la cantidad primitiva y las agregadas son todas iguales, por manera que sea $a = b = c = d \ldots = k$; porque en este caso la equacion anterior se transforma en estotra:

$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots\ldots + a(1+r)$;
en la qual es fácil ver que los términos del segundo miembro forman una proporcion por quocientes, cuyo menor término es $a(1+r)$, el mayor $a(1+r)^n$, y el quociente $1+r$; y por consiguiente la suma de todos los términos será (§. 232):

$$\frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r};$$

tendrémos pues en tal caso:

$$A = a(1+r)\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right).$$

Esta equacion puede tambien servir para resolver quatro qüestiones correspondientes á las que indicamos respectivas á la equacion

$$A = a(1+r)^n.$$

260 Si suponemos que se haya impuesto ó prestado á interes compuesto una cantidad A con la condicion de que el acreedor haya de percibir por espacio de n años una renta anual a hasta extinguir por este medio toda la deuda de capital y réditos, tendrémos una qüestion inversa de la anterior; porque en esta va el deudor descargándose del capital é intereses por medio de diferentes pagas iguales que se han de efectuar á plazos *equidistantes*. Cada una de estas pagas se puede considerar como una anticipacion hecha al acreedor por el deudor, con la qual disminuye este la cantidad $A(1+r)^n$ que tendria que aprontar si en todo el espacio de n años no hubiera satisfecho cantidad alguna; pero es necesario tener presente que el valor de cada una de las anticipaciones se ha de calcular refiriéndolas todas á la misma época en que el deudor tendria que aprontar la suma $A(1+r)^n$ si no las hubiera hecho. Así que, designando por a cada una de las pagas, la que satisface al fin del primer año distará $n-1$ años de aquella época final; y referida á esta época vendrá á valer $a(1+r)^{n-1}$; igual cantidad a satisfecha al fin del segundo año dista de la época final $n-2$ años; y su valor será $a(1+r)^{n-2}$; el valor de la tercera $a(1+r)^{n-3}$; y así de las demas hasta la última, cuyo valor será la misma cantidad a. Por manera que si de este modo ha de haber percibido el acreedor todo el capital con sus réditos, debe haber equacion entre la cantidad $A(1+r)^n$ y la suma de las anticipaciones referidas á la misma

época final. Tendrémos pues:

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} \ldots\ldots + a.$$

Los términos del segundo miembro de esta equacion forman una progresion por quocientes, cuyo menor término es a; el mayor es $a(1+r)^{n-1}$; y el quociente es $1+r$. Será pues la suma de todos los términos

$$\frac{a(1+r)^n - a}{r};$$

y la equacion anterior se transformará en estotra:

$$A(1+r)^n = a\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right).$$

Esta última equacion, así como las que hemos hallado en los párrafos anteriores, puede servir para resolver quatro qüestiones; porque sucesivamente puede ser incógnita cada una de las quatro cantidades indeterminadas que entran en ella; es decir, ó la A que llamarémos el *precio actual* de la renta, ó la misma renta, ó el *tanto por* 100, ó el número n de años que la renta debe durar. Para hallar este último es absolutamente necesario recurrir á los logaritmos. En efecto, despejando primeramente $(1+r)^n$, resultará:

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar};$$

y tomando los logaritmos de ambos miembros, tendrémos:

$$n\mathrm{l}(1+r) = \mathrm{l}a - \mathrm{l}(a - Ar);$$

de donde se deduce que

$$n = \frac{\mathrm{l}a - \mathrm{l}(a - Ar)}{\mathrm{l}(1+r)}.$$

261 Para manifestar el uso que puede hacerse de las fórmula anteriores, nos propondrémos resolver la qüestion siguiente:

Hallar qué cantidad se ha de satisfacer anualmente para extinguir ó amortizar en 12 años una deuda de 1000 reales con los réditos devengados en este tiempo á interes compuesto, siendo 5 por 100 el tanto anual.

En este caso se conocen las cantidades

$$A = 1000; \quad n = 12; \quad r = \frac{1}{20};$$

y se pide la renta anual ó sea la anualidad a. Despejando pues esta

incógnita en la equacion

$$A(1+r)^n = \frac{a((1+r)^n - 1)}{r},$$

resultará:

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Sustituyendo en esta fórmula los valores particulares de las cantidades conocidas A, r y n; y efectuando las operaciones que la misma fórmula prescribe, el resultado final será el valor que deseamos conocer de la renta anual a. Para efectuar estos cálculos será muy conveniente que determinemos por medio de los logaritmos el valor de $\left(\frac{21}{20}\right)^{12}$; y así sabrémos que $\left(\frac{21}{20}\right)^{12} = 1,79586$; y de consiguiente

$$a = \frac{100000.\frac{1}{20}.1,79586}{1,79586 - 1} = \frac{5000.1,79586}{0,79586};$$

y efectuando con el auxîlio de los logaritmos las operaciones indicadas en la última expresion, hallarémos $a = 11282,6$ reales.

Será pues necesario satisfacer esta *anualidad* para extinguir en 12 años la suma de un capital de 100000 reales, y de sus réditos calculados á interes compuesto y á razon de 5 por 100 al año.

262 Otras muchas qüestiones se pueden proponer sobre esta materia; pero los límites á que nos hemos propuesto ceñir esta obra, no nos permiten detenernos á exponer el modo de resolverlas. Observarémos tan solo que para comparar los valores de dos ó mas cantidades pagaderas á diferentes plazos, se deben todas referir á una misma época. Supongamos, para aclarar esto, que un banquero esté obligado á pagar una cantidad a al fin de n años contados desde este momento; y que ahora mismo entrega al acreedor en descuento un libramiento de un valor representado por b, y pagadero al cabo de p años; y se nos pregunte *quánto debe* ó *se le debe*. Para contestar á esta pregunta deberémos referir los valores de las dos cantidades a y b á la época presente, en la qual el valor de la primera se reduce á $\frac{a}{(1+r)^n}$; porque este es el valor de un capital que ascenderia á la cantidad a al cabo de n años. Por la misma razon el valor de la

cantidad b se reduce á $\frac{b}{(1+r)^p}$; y segun que este segundo valor sea menor ó mayor que el primero, la diferencia de los dos indicará lo que le reste satisfacer ó tenga que percibir. Demos por supuesto que $\frac{a}{(1+r)^n} > \frac{b}{(1+r)^p}$; y representemos por c la diferencia de estas dos cantidades, de modo que sea

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p} = c;$$

supongamos ademas que el banquero no pueda satisfacer este resto hasta pasados q años. En tal caso la cantidad que en este momento debiera ser c, vendrá á ser en aquella época $c(1+r)^q$. Así que despues de haber entregado el libramiento del valor b, tendrá el banquero que satisfacer al fin de q años la cantidad representada por $c(1+r)^q$, ó lo que viene á ser lo mismo,

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q; \text{ ó } a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p};$$

sustituyendo en lugar de c la expresion equivalente $\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$, y suponiendo que el número q sea mayor que n y p.

Las cantidades a, b, c....k, de que hemos hablado (§. 259), se valuaron refiriéndolas todas á la época final en que se debia efectuar el pago de la suma A; y en el §. 260 el capital A y todas las *anualidades* se refirieron á la época en que estas debian terminarse.

1.ª Se podrá acaso creer que para descubrir las raices de qualquiera equacion del quarto grado, por exemplo,

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

bastará compararla con el producto hallado (§. 183), igualando las cantidades que así en la equacion como en el producto sean coeficientes de las mismas potencias de la incógnita x; y sin duda por esta razon la mayor parte de los autores elementales creen que este cotejo basta para demostrar que una *equacion de qualquier grado es el producto de tantos factores binomios lineales como unidades hay en el exponente de su grado;* pero ya harémos ver que no tiene solidez alguna este modo de discurrir. Nosotros hemos adoptado (§. 182) esta proposicion solo condicionalmente; porque para afirmarla absolutamente y de positivo, seria necesario demostrar que toda equacion, de qualquier grado que sea, ha de tener forzosamente alguna raiz real ó imaginaria; y esto no es fácil demostrarlo en los elementos del Algebra. Por fortuna no necesitamos por ahora de tal demostracion, y por otra parte se pueden ver en el *Complemento* las reflexîones que sobre este asunto se nos han ocurrido. Si cotejásemos la equacion propuesta con el producto de los quatro factores binomios, resultarian estas quatro equaciones:

$$-a-b-c-d=p;$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q;$$
$$-abc-abd-acd-bcd=r;$$
$$abcd=s.$$

Para deducir ahora de estas equaciones el valor de cada una de las letras a, b, c, d, que representan á las raices desconocidas de la equacion propuesta, tendríamos que empeñarnos en un cálculo muy complicado, si para eliminar, como es necesario, tres de las quatro incógnitas a, b, c, d hiciésemos uso del método expuesto (§. 78); pero si multiplicamos por a^3 la primera de las quatro equaciones; la segunda por a^2, y la tercera por a; si despues sumamos estos tres productos con la quarta equacion, reduciendo términos semejantes, resultará esta nueva equacion: $-a^4=pa^3+qa^2+ra+s$; de la qual se han eliminado las tres incógnitas b, c, d, y que por

medio de una simple transposicion se transforma en estotra: $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$. Esta equacion que contiene las mismas potencias de la cantidad incógnita y las mismas cantidades conocidas que la primitiva propuesta, nos hace ver que despues del cálculo á que ha dado motivo la comparacion de la equacion propuesta con el producto de los quatro factores binomios, encontramos tanta dificultad para determinar el valor de la raiz a, como al principio encontrábamos para determinar alguno de los valores de x.

Con razon pues ha dicho Castillon (*Mem. de Berlin, año de 1789*): „En todos los *Elementos de Algebra* se demuestra que » multiplicando muchos binomios del primer grado se puede formar » una equacion del grado que se quiera; pero no se ha hecho ver que » dada una equacion que tenga qualesquiera coeficientes conocidos, » se pueden en todos casos determinar los factores binomios lineales » que multiplicados entre sí la produzcan."

Si en vez de multiplicar respectivamente por a^3, a^2 y a las tres primeras equaciones que deduximos de la comparacion de la primitiva con el producto, las multiplicásemos respectivamente por b^3, b^2 y b, ó por c^3, c^2 y c, ó por d^3, d^2 y d, y sumásemos tambien los productos con la quarta, tendríamos en el primer caso: $-b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s$; en el segundo $-c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s$; en el tercero $-d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s$; y así es visto que sea qual fuere la raiz que intentemos determinar de la equacion primitiva, venimos siempre á parar á otra equacion que en realidad no se diferencia de ella, y cuya resolucion ofrece por consiguiente la misma dificultad. La identidad de todas estas últimas equaciones es efecto de que las quatro cantidades incógnitas a, b, c, d estan todas combinadas de un mismo modo en las quatro equaciones fundamentales; y de ahí es que qualquiera de las incógnitas se debe determinar por medio de la misma serie de operaciones. En general, siempre que en la investigacion de muchas cantidades incógnitas hayamos de emplear para cada una el mismo razonamiento, las mismas operaciones y las mismas cantidades conocidas, todas aquellas cantidades serán necesariamente raices de una misma equacion.

2.ª Para eliminar una de dos incógnitas que se hallan en dos equaciones de grados superiores, suelen algunos prescribir un méto-

do, del qual vamos á dar alguna idea aplicándolo á las equaciones siguientes:

$$Nx^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$N'x^3+P'x^2+Q'x+R'=0.$$

Multiplicando la primera por N', y la segunda por N; y restando el segundo producto del primero, como en el §. 84, resultará $(N'P-NP')x^2+(N'Q-NQ')x+N'R-NR'=0$ (a). Multiplicando asimismo la primera de las equaciones propuestas por R', y la segunda por R, y restando el segundo producto del primero, tendrémos:

$(R'N-RN')x^3+(R'P-RP')x^2+(R'Q-RQ')x=0$;
y dividiendo por x todos los términos de esta equacion, quedará reducida á

$(R'N-RN')x^2+(R'P-RP')x+(R'Q-RQ')=0$ (b),
tendrémos pues en lugar de las equaciones propuestas las dos equaciones (a) y (b) del segundo grado con respecto á x. Si las representamos por

$$nx^2+px+q=0,$$
$$n'x+p'x+q'=0;$$

y efectuamos con estas lo que con las dos primitivas, se deducirán de ellas fácilmente dos equaciones del primer grado con respecto á x. Por último, deduciendo de cada una de estas una expresion del valor de x, é igualando las dos expresiones, tendrémos la equacion final. Baste esta ligera idea de un método sumamente imperfecto, que no da luz alguna sobre la mutua conexîon que entre sí tienen las varias equaciones fundamentales de un mismo problema, ni sobre el modo de determinar la incógnita eliminada, luego que esté conocido el valor de la otra.

3.ª Como por el método indicado (§. 243) sea muy penosa la determinacion del valor de x en la equacion $10^x=y$, en la qual suponemos conocido el de y; podemos por el contrario suponer conocidos diferentes valores de x, y determinar los correspondientes de y, á fin de que estos nos sirvan para resolver la qüestion inversa, segun vamos á hacer ver.

Demos á x varios valores desde 0,1 hasta 0,9; y fácilmente se ve que en habiendo determinado la y que corresponde á $x=0,1$;

ó lo que es lo mismo, en habiendo hallado el valor de $10^{\frac{1}{10}}$, todos los demas valores de y se determinan sin dificultad alguna; porque $10^{\frac{2}{10}}$; $10^{\frac{3}{10}}$ &c. son respectivamente la segunda, la tercera &c. potencias de $10^{\frac{1}{10}}$.

Ahora bien, por medio de la extraccion de la raiz quadrada se sabe que $$10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{5}{10}} = 3,16227766o;$$

y extrayendo de este último resultado la raiz quinta, sabrémos que

$$10^{\frac{1}{10}} = 1,258925412.$$

Del mismo modo extrayendo la raiz quadrada de los dos miembros de la última equacion, resulta

$$10^{\frac{1}{20}} = 10^{\frac{5}{100}} = 1,122018454;$$

y extrayendo de los miembros de esta la raiz quinta, tendrémos que

$$10^{\frac{1}{100}} = 1,023292992;$$

y elevando á la segunda, á la tercera &c. potencias los miembros de la última equacion, obtendrémos los valores de y correspondientes á los de x desde 0,01 hasta 0,09.

Ya se dexa ver cómo podrémos determinar los valores de y correspondientes á los de x desde 0,001 hasta 0,009; desde 0,0001 hasta 0,0009, y así sucesivamente. De este modo formarémos la tabla adjunta.

TABLA.

Logaritmos.	Números.	Logaritmos.	Números.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,000001381
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

Por medio de la tabla precedente se puede hallar el logaritmo de qualquier número, dividiendo primeramente este número por la mayor potencia de 10 que en él esté contenida, y efectuando la serie de operaciones que indicarémos en el exemplo siguiente:

Propongámonos *determinar el logaritmo que corresponde al número* 2549.

Dividamos este número por 1000, que es la mayor potencia de 10 que en él está contenida, y tendrémos:

$$2549 = 10^3 \times 2,549;$$

busquemos en la tabla el número proxîmamente menor que 2,549; y verémos en ella que

$$10^{0,4} = 2,511886432;$$

dividamos por este número á 2,549, y resultará que

$$2,549 = 10^{0,4} \times 1,014775177;$$

busquemos en la tabla el número próxîmamente menor que............ 1,014775177, y en ella verémos que

$$10^{0,006} = 1,013911386;$$

dividamos por este número á 1,014775177; y resultará que

$$1,014775177 = 10^{0,006} \times 1,00085174\,2;$$

continuemos del mismo modo efectuando divisiones hasta hallar un quociente que se diferencie de la unidad solo en partes decimales del órden que nos hayamos propuesto despreciar.

Si, por exemplo, nos hubiésemos propuesto aproxîmar hasta las milésimas el logaritmo que buscábamos de 2549, no continuaríamos mas las divisiones; porque las partes decimales que el último quociente 1,00085174 2 tiene ademas de la unidad, son de órdenes mas elevados que las milésimas. Diríamos pues:

$$2549 = 10^3 \times 10^{0,4} \times 10^{0,006} = (10)^{3,406};$$

y de consiguiente el logaritmo que buscábamos aproxîmado hasta las milésimas es 3,406; y si continuásemos las divisiones hasta siete hallaríamos que el logaritmo de 2549 aproxîmado hasta la diezmillonésimas es 3,406369.

Con mayor facilidad se determina por medio de la misma tabla el número que corresponde á un logaritmo dado. Sea este, por exemplo, 2,547; y debiendo en esta suposicion ser el número que buscamos

$$(10)^{2,547} = (10)^2 \times (10)^{0,5} \times (10)^{0,04} \times (10)^{0,007};$$

será por consiguiente el producto de estos quatro factores. Ahora bien

$$(10)^2 = 100,$$
$$(10)^{0,5} = 3,162277660,$$
$$(10)^{0,04} = 1,096478196,$$
$$(10)^{0,007} = 1,016248694;$$

segun puede verse en la tabla. Será pues 352,357 el número correspondiente al logaritmo propuesto 2,547.

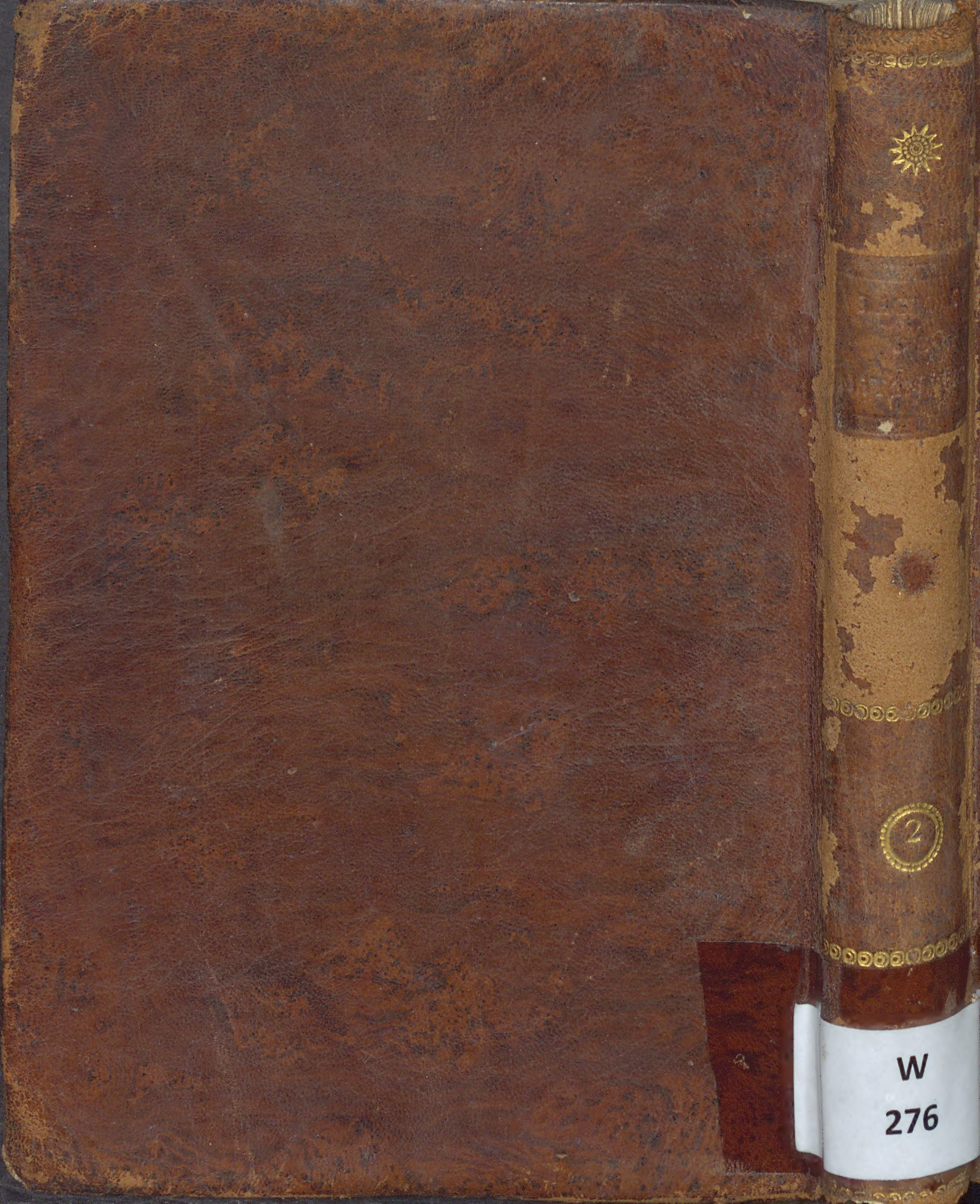
Con este mismo objeto de hallar los números correspondientes á los logaritmos que puedan dársenos, publicó el ingles *Dodson* una tabla semejante, bien que mucho mas extensa, á la qual tituló *Antilogarithmic-canon*.

En el *Complemento del Algebra* darémos varias fórmulas para resolver con suma prontitud y facilidad los mismos dos problemas generales, á saber: 1.° *Dado un número, hallar el logaritmo que le corresponde en un sistema qualquiera.* 2.° *Dado el logaritmo que en un sistema determinado corresponde á un número desconocido, hallar este número.*




po
Biblioteca
UNIVERSIDAD D SEVILLA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600988870


colorchecker CLASSIC
calibrite
mm


2